Využitie derivácií:

1 L'Hospitalovo pravidlo

↳ ďalšia „finta" na riešenie limít
↳ používame na limity, ktoré „po dosadení" dávajú: a) $\frac{0}{0}$ b) $\frac{\text{hocičo}}{\pm\infty}$ (najčastejšie $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$)

Pravidlo hovorí: (ak $g'(x) \neq 0$ pre žiadne $x \in D_f$)

$$\boxed{\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}}$$

→ Umožňuje spočítať limity pre neurčité výrazy tak, že po (niekoľkonásobnom) derivovaní prejde limita na niečo jednoduchšie, kam už môžeme dosadiť.

$f(x), g(x)$ sú diferencovateľné funkcie (dajú sa derivovať v každom $x \in D_f$) okrem bodu x_0

táto limita musí existovať

Príklady:

Príklad, ktorý sme už dokázali spočítať fintou č. 1, ale demonštrujme silu tejto metódy:

Pr 1: Limita v nevlastnom bode

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3x-6}{x+3} \overset{\text{finta č. 1}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{\cancel{x}(3-\frac{6}{x})}{\cancel{x}(1+\frac{3}{x})} = 3$$

→ v nevlastnom bode je vždy možno uprednostniť fintu č. 1.

Teraz cez L'Hospitala!

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3x-6}{x+3} \overset{L.H.}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{3}{1} = 3$$

typ $\frac{\infty}{\infty}$

dostali sme ten istý výsledok (tu boli oba postupy porovnateľné)

Pr. 2: Limita vo vlastnom bode

$$\lim_{x\to-3} \frac{4x^2-36}{x+3}$$

mohli by sme napríklad spočítať jednostranné limity a pozrieť sa, čomu sa rovnajú

$$\lim_{x\to-3^+} \frac{4x^2-36}{x+3} = \lim_{x\to-3^+} \frac{4(x^2-9)}{x+3} = \lim_{x\to-3^+} \frac{4(x-3)\cancel{(x+3)}}{\cancel{x+3}} = -24$$

$$\lim_{x\to-3^-} \frac{4x^2-36}{x+3} = \lim_{x\to-3^-} \frac{4(x-3)\cancel{(x+3)}}{\cancel{x+3}} = -24$$

↳ Limita ∃ a je rovná -24

Teraz cez L.H:

$$\lim_{x\to-3} \frac{4x^2-36}{x+3} \overset{L.H.}{=} \lim_{x\to-3} \frac{8x}{1} = 8\cdot(-3) = -24 \Rightarrow \text{to isté}$$

typ $\frac{0}{0}$ dosadíme

(a rýchlejšie :))

Pr. 3

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^2-x-2} \overset{\text{typ } \frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 2}\frac{2x}{2x-1} \overset{\text{môžeme dosadiť}}{=} \frac{4}{3}$$

Poznámka: Túto limitu sme mohli riešiť ako už takúto podobnú v minulých cvičeniach taktiež rozkladom, lebo číslo 2 je nulový bod čitateľa aj menovateľa:

$$\lim_{x\to 2}\frac{\cancel{(x-2)}(x+2)}{\cancel{(x-2)}(x+1)} = \lim_{x\to 2}\frac{(x+2)}{x+1} \overset{\text{dosadenie}}{=} \frac{4}{3}$$

$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

Vietove vzťahy

... ale L.H. sa zdá byť rýchlejší a výhodnejší ak budeme mať polynómy vyšších stupňov.

Pr. 4

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^8-1}{x^7+x^2-2} \overset{L.H}{=} \lim_{x\to 1}\frac{8x^7}{7x^6+2x} = \frac{8}{9}$$

typ $\frac{0}{0}$

Tu už by sme rozklad našli jedine delením polynómu polynómom, L.H. poskytuje značnú úsporu času a navyše znižuje pravdepodobnosť chyby (derivovať polynóm je ľahšie ako deliť polynómy)

Ale načo by nám bola nová finta, ak by sme ju používali len na niečo, čo už vieme (však racionálne lomené fcie vieme inak)

$$(x^8-1):(x-1) = x^7+x^6+\dots$$
$$-x^8 \pm x^7$$
$$x^7-1$$
$$-x^7+x^6$$

L.H je rýchlejší! :) ← A takisto menovateľ... (dosť práce)

Pr. 5:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{e^x-1} \underset{L.H}{\overset{\text{typ } \frac{0}{0}}{=}} \lim_{x\to 0}\frac{2x}{e^x} = \frac{0}{1} = 0$$

(tu už nám žiaden rozklad nepomôže)

Pomocou tohto sa dá ukázať, že exponenciála ide do nekonečna rýchlejšie ako ľubovoľný polynóm: (mocnina a^x pre $a>1$)

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\frac{x^p}{e^x} \underset{\frac{\infty}{\infty}}{\overset{L.H}{=}} \lim_{x\to+\infty}\frac{p x^{p-1}}{e^x} \underset{\frac{\infty}{\infty}}{\overset{L.H}{=}} \lim_{x\to+\infty}\frac{p(p-1)x^{p-2}}{e^x} = \dots = \lim_{x\to+\infty}\frac{\overbrace{p(p-1)\dots 1}^{p!}}{e^x} = \boxed{0}}$$

$$\boxed{\Rightarrow e^x >> x^p}$$

Pr. 6:

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{1-x} \overset{L.H}{\underset{\text{typ } \frac{0}{0}}{=}} \lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{x}}{-1} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{-x} = -1$$

Pr. 7:

$$\lim_{x\to 0^+} x^2 \ln x = \text{„}\, 0 \cdot (-\infty) \text{"}$$

Toto nie je v tvare podielu fcií, musíme to najprv prepísať, aby sme mohli použiť L.H.

$$\lim_{x\to 0^+} x^2 \ln x = \lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x^2}} \overset{L.H}{\underset{\text{typ } \frac{-\infty}{+\infty}}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{2}{x^3}} = \lim_{x\to 0} -\frac{x^3}{2x} = \lim_{x\to 0} -\frac{x^2}{2} = 0$$

Čo ak by som podiel previedol opačne?

$$\lim_{x\to 0} x^2 \ln x = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2}{\frac{1}{\ln x}} \overset{\text{typ } \frac{0}{0}}{\underset{L.H}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{2x}{-\frac{1}{\ln^2 x} \cdot \frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0} \frac{2x}{-\frac{1}{x \ln^2 x}}$$

... To sme si moc nepomohli a ďalší L.H. by všetko len skomplikoval... ⇒ Preto prvá možnosť bola správna.

Pr. 8:

$$\lim_{x\to +\infty} \sqrt{x}\, e^{-x} \overset{\infty \cdot 0}{=} \lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{x}}{e^x} = 0$$

tu môžeme využiť znalosť toho, že $e^x >> x^{\frac{1}{2}}$

alebo...

$$\underset{L.H}{=} \lim_{x\to +\infty} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{e^x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{2\sqrt{x}\, e^x} = 0$$

Pozrime sa aj tu, čo by sa stalo, ak by sme zase dali do menovateľa druhý výraz:

$$\lim_{x\to +\infty} \sqrt{x}\, e^{-x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{e^{-x}}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \lim_{x\to +\infty} \frac{e^{-x}}{x^{-\frac{1}{2}}} \overset{\text{typ } \frac{0}{0}}{\underset{L.H.}{=}} \lim_{x\to +\infty} \frac{-e^{-x}}{-\frac{1}{2} x^{-\frac{3}{2}}} \overset{\text{typ } \frac{0}{0}}{\underset{L.H}{=}}$$

$$= \lim_{x\to +\infty} \frac{+e^{-x}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} x^{-\frac{5}{2}}} = \ldots$$

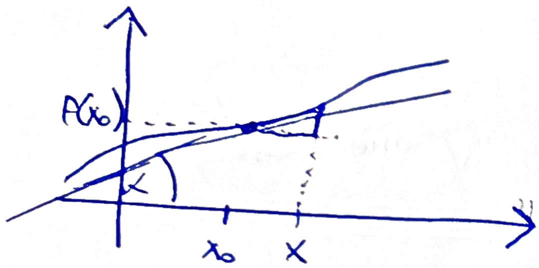
Vidíme, že mocnina v menovateli sa bude stále zmenšovať a čitateľ bude stále nula → týmto si nepomôžeme

→ správne bolo poslať e^{-x} do menovateľa

Teraz by ste už mali byť schopný spočítať DÚ č. 10 a prednášky.

2 Dotyčnica funkcie v určitom bode (Tečna ke grafu)

Z vlastností a definície derivácie:



V bode $[x_0, f(x_0)]$ má fcia f smernicu $f'(x_0)$.

Ak chceme spočítať hodnotu fcie v bode x, $f(x)=y$ blízkom bodu x_0 potom:

$a = f'(x_0)$

$$\boxed{y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}$$

Hodnota fcie v bode x blízkom x_0 (približne)

je zároveň rovnicou dotyčnice v bode x_0.

Pr: Najdime dotyčnicu ku grafu fcie $f(x) = x^2 - 2x$ v bode $x_0 = 4$.

- Najprv nájdeme bod dotyku $T = [x_0, f(x_0)]$

$$f(x_0) = f(4) = 4^2 - 2\cdot 4 = 16 - 8 = 8$$

Dotyčnica bude prechádzať bodom $T = [4, 8]$

- Najdeme smernicu: $f'(x) = 2x - 2$

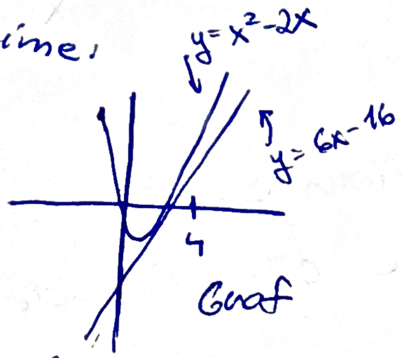
$$f'(x_0) = f'(4) = 2\cdot 4 - 2 = 6 = a$$

Rovnica dotyčnice má tvar lineárnej fcie: $y = ax + b$

Táto rovnica musí platiť aj pre bod T: $f(x_0) = a x_0 + b$

Zostáva nám určiť b: dosadíme a vyjadríme:

$$8 = 6\cdot 4 + b$$
$$8 = 24 + b \quad /-24$$
$$b = -16$$



$\Rightarrow \boxed{y = 6x - 16}$ je rovnica dotyčnice v bode $x_0 = 4$.

Pr. 19 Najdime rovnicu dotyčnice k fcii $f(x) = \frac{2x-1}{x+1}$

v bode $x_0 = -2$.

- Opäť vidíme, že grafom tejto fcie bude hyperbola, musíme určiť definičný obor. $\boxed{D_f = R \setminus \{-1\}.}$
- Spočítame hodnotu $f(x_0)$ a nájdeme bod dotyku $T=[x_0, f(x_0)]$

$$\boxed{f(x_0) = f(-2) = \frac{2\cdot(-2)-1}{-2+1} = \frac{-5}{-1} = 5} \Rightarrow \boxed{T=[-2,5]}$$

- Určíme smernicu dotyčnice ako $\boxed{f'(x_0)=a}$

$$f'(x) = \frac{2(x+1)-(2x-1)\cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{\cancel{2x}+2-\cancel{2x}+1}{(x+1)^2} = \frac{3}{(x+1)^2}$$

$$f'(x_0) = \frac{3}{(-2+1)^2} = 3$$

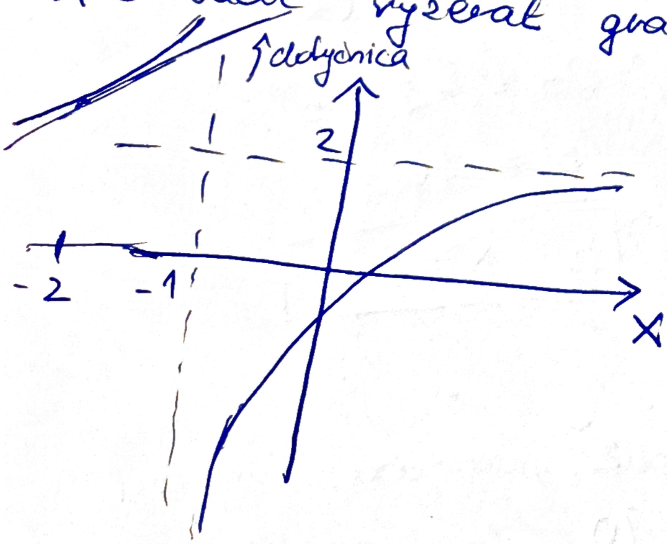
- Rovnica dotyčnice má tvar $y = ax+b$ a musí platiť aj pre bod dotyku $T=[x_0, f(x_0)]$, teda $\boxed{f(x_0) = f'(x_0)x_0 + b}$

Dosadíme:

$$5 = 3\cdot(-2)+b \Rightarrow b = 11$$

Preto $\boxed{y = 3x+11}$ je rovnica dotyčnice v bode x_0.

Ako bude vyzerať graf? → Nájdeme stred a zostrojíme parabolu a asymptoty (viď. predošlé cvičenie)



Pr. 11 Majme danú fciu $f(x) = x^3 - 11x + 10$. Určte body $x_0 \in \mathbb{R}$ také, v ktorých má dotyčnica smernicu rovnú $a = 1$. V každom takom bode potom napíšte rovnicu dotyčnice.

Z informácií zo zadania hľadáme také x_0, kde platí:

$$a = f'(x_0) = 1 = 3x_0^2 - 11$$

$$f(x) = x^3 - 11x + 10$$
$$f'(x) = 3x^2 - 11$$

$$3x_0^2 = 12$$
$$x_0^2 = 4$$
$$x_0 = \pm 2$$

Teda v týchto dvoch bodoch

Bod $T_1 = [+2, f(+2)]$

$T_2 = [-2, f(-2)]$

$$f(+2) = 2^3 - 11 \cdot 2 + 10 = -4$$
$$f(-2) = (-2)^3 - 11 \cdot (-2) + 10 = 24$$

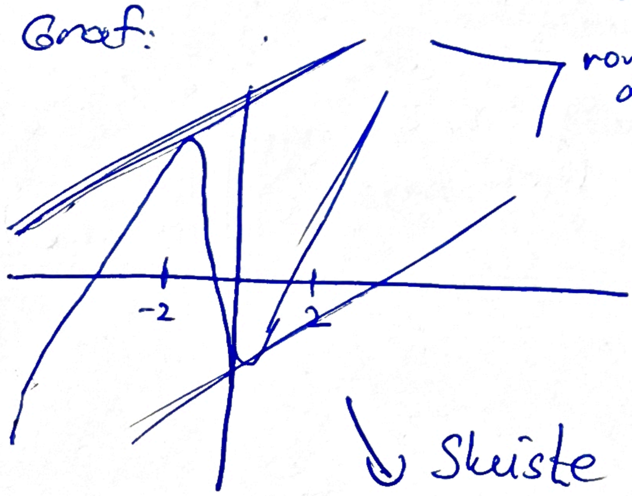
V bode T_1 je graf $y = ax + b \Rightarrow f(+2) = a(+2) + b$

$$-4 = 1 \cdot 2 + b$$
$$\Rightarrow b = -6$$
$$\boxed{y = x - 6}$$

V bode T_2 je graf $y = ax + b \Rightarrow f(-2) = a \cdot (-2) + b$

$$24 = -2 + b$$
$$b = 26$$
$$\Rightarrow \boxed{y = x + 26}$$

Graf:



rovnobežné dotyčnice

Skúste si vykresliť pomocou desmosu grafy $y = x^3 - 11x + 10$, $y = x + 26$, $y = x - 6$ do jedného a sledujte, čo sa bude diať.