③ **Finta** → rozšírenie výrazu výrazom s opačným znamienkom

→ Finta sa hodí najmä pri počítaní s odmocninami, teda využíame vzorec $\boxed{(a-b)(a+b) = a^2 - b^2}$

Pr. 9.

skúsme dosadiť

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}\left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n}\right) = \infty \cdot (\underbrace{\infty - \infty}_{\text{nedefinovaný výraz}})$$

→ Rozšírime výrazom $(\sqrt{n+2}+\sqrt{n})$ v tvare jednotky.

$$= \lim_{n\to\infty} \sqrt{n} \cdot \left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n}\right) \cdot \underbrace{\frac{(\sqrt{n+2}+\sqrt{n})}{(\sqrt{n+2}+\sqrt{n})}}_{\text{rozšírenie a použijeme vzorec}}$$

vyjmeme zas najvyšší člen

$$= \lim_{n\to\infty} \sqrt{n}\,\frac{(n+2-n)}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}} =$$

$$= 2\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n(1+\frac{2}{n})}+\sqrt{n}} = 2\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}\sqrt{(1+\frac{2}{n})}+\sqrt{n}}$$

$$= 2\lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{\sqrt{n}}\;1}{\cancel{\sqrt{n}}\left(\sqrt{(1+\frac{2}{n})}+1\right)} = 2\lim_{n\to\infty} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{(1+\underset{0}{\underset{\shortparallel}{\frac{2}{n}}})}+1}}_{\frac{1}{2}}$$

$$\underline{\underline{= 1}}$$

Pr 10 → Skúškový príklad (záverečný test ZS 2021/22 - A)

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n^2+1}\left(n^2-\sqrt{n^4-10n+18}\right)=$$

↙ použijem rozšírenie (lebo mám po dosadení neurčitý výraz $\infty(\infty-\infty)$)

$$=\lim_{n\to\infty}\sqrt{n^2+1}\left(n^2-\sqrt{n^2-10n+18}\right)\cdot\underbrace{\frac{n^2+\sqrt{n^4-10n+18}}{n^2+\sqrt{n^4-10n+18}}}_{\text{rozšírenie s opačným znamienkom}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sqrt{n^2+1}\,\frac{n^4-(n^4-10n+18)}{n^2+\sqrt{n^4-10n+18}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{n^2+1}\,\frac{\cancel{n^4}-\cancel{n^4}+10n-18}{n^2+\sqrt{n^4-10n+18}}$$

↗ úpravy

$$=\lim_{n\to\infty}\sqrt{n^2\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}\,\frac{n\left(10-\frac{18}{n}\right)}{n^2+\sqrt{n^4\left(1-\frac{10}{n^3}+\frac{18}{n^4}\right)}}$$

↗ vynímame

$$=\lim_{n\to\infty}\cancel{n}\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}\,\frac{\cancel{n}\left(10-\frac{18}{n}\right)}{\cancel{n^2}\left(1+\sqrt{1-\frac{10}{n^3}+\frac{18}{n^4}}\right)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\underset{\overset{\shortparallel}{1}}{\sqrt{1+\underset{\downarrow\atop 0}{\frac{1}{n^2}}}}\cdot\lim\frac{10-\frac{18}{n}\to 0}{\underset{\overset{\shortparallel}{5}}{1+\sqrt{1-\underset{\downarrow\atop 0}{\frac{10}{n^3}}+\underset{\downarrow\atop 0}{\frac{18}{n^4}}}}}=\underline{\underline{5}}$$

↗ VoAL

8

Limita funkcie

- Pre fciu jednej premennej číslo $A \in R^*$ nazveme limitou funkcie $f(x)$ v bode x_0 nazveme ak:

$$\boxed{\lim_{x\to x_0} f(x) = A}$$

ak $A \in R$ – vlastná limita
$A = \pm\infty$ – nevlastná limita

ak $x_0 \in R$ – vlastný bod
$x_0 = \pm\infty$ – nevlastný bod

- Fcia sa blíži ľubovoľne blízko v limitnom bode hodnote A.
- Limity v nevlastných bodoch počítame rovnako ako limity postupnosti. (Namiesto $n \to +\infty$ máme napr. $x \to +\infty$) I

Rozoznávame limity vo vlastnom bode tzv. jednostranné:

a) limita sprava $\lim_{x\to x_0^+} f(x)$ → pýtame sa, ~~do~~ k čomu sa blíži naša Fcia, ak sa čísla blížia k danému bodu zo strany vyšších čísel.

b) limita zľava $\lim_{x\to x_0^+} f(x)$ → k čomu sa blíži ak ideme smerom z nižších čísel.

⇒ Fcia má limitu v bode práve vtedy ak sú jednostranné limity zhodné.

Poznámka: Pre počítanie limít funkcie platia rovnaké pravidlá ako pre postupnosti.

1) Ak je v danom bode x_0 Fcia definovaná a navyše je spojitá ⇒ potom hodnota limity je rovná funkčnej hodnote $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ (priame dosadenie) II

2) Ak $x_0 \notin D_f$ potom je napr. krajným bodom → počítame jednostranné limity III

3) Body $x_0 \notin D_f$, ktoré nemajú ani v svojom okolí definovanú funkčnú hodnotu → nepočítame limity.
napr. $\lim_{x\to -1} \log x$ nemá zmysel, ale $\lim_{x\to 0^+} \log x = -\infty$ iV

Pr.1 Lineárna lomená fcia : a) určte D_f b) Limity v $\pm\infty$, v bode 4 a 6

$$f(x) = \frac{x+3}{x-4}$$

D_f : dobre známy menovateľ $\neq 0 \Rightarrow x-4 \neq 0$ ← pripomene napísať na intervaly

$x \neq 4 \Rightarrow D_f = \mathbb{R} \setminus \{4\}$

dosadíme máme výraz „$\frac{+\infty}{+\infty}$"

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x+3}{x-4} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x(1+\overset{\to 0}{\frac{3}{x}})}{x(1-\underset{\to 0}{\frac{4}{x}})} = 1$ $\qquad$ ∵ lebo $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{a}{x} = 0$

musíme počítať limity 1

- $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x+3}{x-4} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x(1+\overset{\to 0}{\frac{3}{x}})}{x(1-\underset{\downarrow 0}{\frac{4}{x}})} = 1$

tak isto

0^+... kladná nula „$(0{,}000\,000\ldots\,0001)$"

0^-... záporná nula „$(-0{,}000\,000\ldots\,001)$"

- $\lim\limits_{x\to4^+} \frac{x+3}{x-4} = +\infty$ ← dosadíme máme $\frac{7}{0^+}$

- $\lim\limits_{x\to4^-} \frac{x+3}{x-4} = \frac{7}{0^-} = -\infty$ $\Big\}$ limita neexistuje

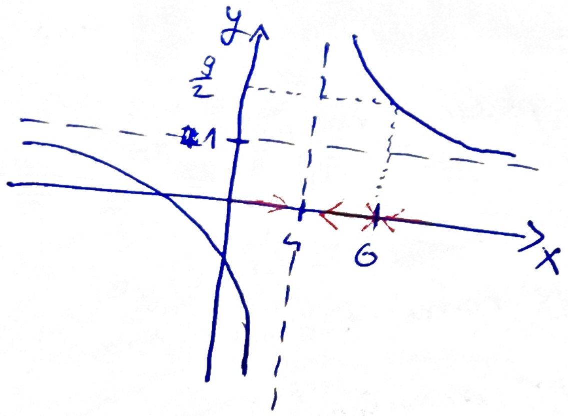
$\frac{a}{0^+} = +\infty \quad a > 0$

$\frac{a}{0^-} = -\infty \quad a > 0$

- $\lim\limits_{x\to6^+} \frac{x+3}{x-4} = \frac{9}{2} = \lim\limits_{x\to6^-} \frac{x+3}{x-4}$

môžeme dosadiť (je spojitá a $x=6$ patrí do D_f)

Ak by sme chceli vidieť graf! (To čo bolo na miniteste 2)



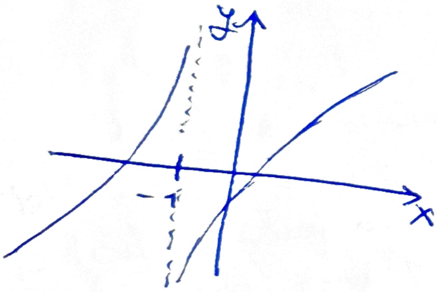
Pr. 2 $f(x) = \dfrac{x^2+2x-1}{x+1}$ Určte D_f a limity v krajných bodoch

D_f: $x+1 \neq 0$

$x \neq -1 \Rightarrow D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ ↗ krajný bod, spolu s ±∞

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2+2x-1}{x+1} \underset{\text{finta 1}}{=} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2(1+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2})}{x(1+\frac{1}{x})} = \lim\limits_{x\to+\infty} x \cdot \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(1+\overset{\nearrow 0}{\frac{3}{x}}-\overset{\nearrow 0}{\frac{1}{x^2}})}{1+\underset{0}{\frac{1}{x}}} = +\infty \cdot 1 = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2+2x-1}{x+1} = \lim\limits_{x\to-\infty} x \cdot \lim \dfrac{1+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}} = -\infty \cdot 1 = -\infty$
- $\lim\limits_{x\to-1^-} \dfrac{x^2+2x-1}{x+1} = \dfrac{(-1)^2+2\cdot(-1)-1}{0^-} = \dfrac{-2}{0^-} = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to-1^+} \dfrac{x^2+2x-1}{x+1} = \dfrac{(-1)^2+2\cdot(-1)-1}{0^+} = -\dfrac{2}{0^+} = -\infty$

Ako by sme načrtli túto fciu z týchto informácií?



Asi niečo takéto...

Pr. 3 $f(x) = \dfrac{5x^2-x}{x^2-4}$

D_f: $x^2-4 \neq 0$

$x^2 \neq 4$

$x \neq \pm 2$

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2, +2\}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{5x^2-x}{x^2-4} \underset{\text{finta 1}}{=} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\cancel{x^2}(5-\overset{\nearrow 0}{\frac{1}{x}})}{\cancel{x^2}(1-\underset{0}{\frac{4}{x^2}})} = 5$ → to isté pre $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 5$ (ten istý postup)

Limity v nevlastných bodoch

Limity v krajných bodoch

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{5x^2-x}{x^2-4} = \frac{5\cdot 2^2-2}{0^+} = \frac{18}{0^+} = +\infty$$

↑ dosadíme

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{5x^2-x}{x^2-4} = \frac{18}{0^-} = -\infty$$

↑ do.

$\Big\}\ \lim_{x\to 2} f(x) \to \nexists$

$$\lim_{x\to -2^+} \frac{5x^2-x}{x^2-4} = \frac{5\cdot(-2)^2+2}{0^-} = \frac{22}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x\to -2^-} \frac{5x^2-x}{x^2-4} = \frac{22}{0^+} = +\infty$$

$\Big\}$ limita v bode $x=-2$ neexistuje

Ako vyzerá graf? → Môžete skúsiť použiť desmos a vykresliť si a overiť či to platí

Pr. 4 Pokiaľ sa dá, tak je vždy dobré rozbiť čitateľ a menovateľ na súčin dvoch alebo viacerých zátvoriek

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-3x+2}{x^2-4x+3} = \frac{1^2-3+2}{1-4+3} = \text{„}\frac{0}{0}\text{"}$$

↑ dosadíme

→ nedefinovaný výraz, musíme čitateľ aj menovateľ rozložiť na súčin zátvoriek, lebo $x=1$ rieši oba aj čitateľ aj menovateľ (je koreň) → dá sa určite deliť $(x-1)$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{(x-2)\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}(x-3)} = \lim_{x\to 1} \frac{x-2}{x-3} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$$

↗ už môžeme dosadiť

Pr. 5

$$f(x) = \frac{5x^3+5x+2}{6x^3-3x^2}$$

D_f:

$$6x^3-3x^2 \neq 0$$

$$x^2(6x-3) \neq 0$$

$$x \neq 0 \qquad 6x-3 \neq 0$$

$$x \neq \frac{1}{2}$$

Hľadáme limity v bodoch $\pm\infty,\ \frac{1}{2}^+,\ \frac{1}{2}^-,\ 0^+,\ 0^-$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{5x^3+5x+2}{6x^3-3x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x^3}\left(5+\overset{\to 0}{\frac{5}{x^2}}+\overset{\to 0}{\frac{2}{x^3}}\right)}{\cancel{x^2}\left(6-\underset{\downarrow\atop 0}{\frac{3}{x}}\right)}=\frac{5}{6}$$

... analogický výpočet prejde pre $x\to-\infty$ vyjde tiež $\frac{5}{6}$

$$\lim_{x\to0^+}\frac{5x^3+5x+2}{6x^3-3x^2}=\lim_{x\to0^+}\frac{5x^3+5x+2}{\cancel{6}x^2(6x-3)}=\frac{2}{0^+\cdot(-3)}=\frac{2}{0^-}=-\infty$$

$$\lim_{x\to0^-}\frac{5x^3+5x+2}{6x^3-3x^2}=\lim_{x\to0^-}\frac{5x^3+5x+2}{x^2(6x-3)}=\frac{2}{0^+\cdot(-3)}=-\infty$$

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}^+}\frac{5x^3+5x+2}{x^2\cdot(6x-3)}=\frac{5\cdot\frac{1}{8}+\frac{5}{2}+2}{\frac{1}{4}\cdot0^+}=\frac{K}{0^+}=+\infty$$

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}^-}\frac{5x^3+5x+2}{x^2(6x-3)}=\frac{5\cdot\frac{1}{2}+5\cdot\frac{1}{2}+2}{\frac{1}{4}\cdot0^-}=\frac{K}{0^-}=-\infty$$