

Zhrnutie 2 prednášky (mocniny, odmocniny, exponenciála, logaritmus):

a^n a ... základ $a \in \mathbb{R}$
 n ... exponent $n \in \mathbb{N}$

Vetahy:

$$\begin{aligned} a^{b+c} &= a^b \cdot a^c \\ a^{b \cdot c} &= (a^b)^c = (a^c)^b \\ a^0 &= 1 \quad a \neq 0 \\ a^{\frac{c}{b}} &= \sqrt[b]{a^c} \\ a^{-n} &= \frac{1}{a^n} \end{aligned}$$

Pr. $2^8 = 2^5 \cdot 2^3 = 2^2 \cdot 2^6 = \dots$

Pr. $2^8 = (2^4)^2 = (2^2)^4$

Pr. $16^{\frac{3}{2}} = \overset{\text{druhá sa nepíše}}{\sqrt{16^3}} = 64$

Definičný obor fcie obsahujúci odmocninu je vždy učení podmienkou, že výraz pod odmocninou ≥ 0 .

Pr.1 Riešte rovnicu:

$$2^{x-1} \cdot 4 = 8^{2x}$$

$$2^{x-1} \cdot 2^2 = (2^3)^{2x}$$

$\therefore$ vzorec

$$2^{x-1+2} = 2^{3 \cdot 2x}$$

$$2^{x+1} = 2^{6x}$$

$$x+1 = 6x \quad | -x$$

$$5x = 1$$

$$x = \frac{1}{5}$$

Skúška správnosti:

L: $2^{\frac{1}{5}-1} \cdot 4 = 2^{\frac{1-5}{5}} \cdot 2^2 = 2^{-\frac{4}{5}+2} = 2^{\frac{-4+10}{5}} = 2^{\frac{6}{5}} = \sqrt[5]{2^6} = \sqrt[5]{64}$

P: $8^{2 \cdot \frac{1}{5}} = (2^3)^{\frac{2}{5}} = 2^{\frac{6}{5}} = \sqrt[5]{2^6} = \sqrt[5]{64}$ ✓

① Riešenie exponenciálnych rovníc metódou úpravy na rovnaký základ

$\therefore$ Cieľom je upraviť obe strany tak, aby mali rovnaký základ (pokiaľ je to možné) (V tomto prípade sú všetky čísla mocniny čísla 2)

Ak máme rovnaký základ, potom sa musia rovnáť exponenty

Pr. 2 Riešte rovnice: (2) Riešenie prostredníctvom vyňimania

$$\left(\frac{1}{3}\right) \cdot 3^{x+4} + 3 \cdot 3^x + 3^x = 117$$

$$\frac{1}{3^2} \cdot 3^{x+4} + 3^{x+1} + 3^x = 117$$

$$3^{-2} \cdot 3^{x+4} + 3^{x+1} + 3^x = 117$$

$$3^{x+2} + 3^{x+1} + 3^x = 117$$

$$3^x (3^2 + 3 + 1) = 117$$

$$3^x \cdot 13 = 117$$

$$3^x = \frac{117}{13} = 9$$

$$3^x = 3^2$$

$$\underline{\underline{x = 2}}$$

Skúska:

$$L: \frac{1}{9} \cdot 3^6 + 3 \cdot 3^2 + 3^2 =$$
$$= 3^4 + 3^3 + 3^2$$

$$= 81 + 27 + 9 = 117$$

$$P: = 117$$

$$L = P$$

$\Rightarrow x = 2$ je riešenie

Pr. 3. $16^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{2x} = 1$

$$\sqrt{16} \cdot \left(\frac{1}{2^2}\right)^{2x} = 2^0$$

$$4 \cdot (2^{-2})^{2x} = 2^0$$

$$2^2 \cdot 2^{-2 \cdot 2x} = 2^0$$

$$2^{2-2 \cdot 2x} = 2^0$$

$$2 - 4x = 0$$

$$2 = 4x$$

$$\underline{\underline{x = \frac{1}{2}}}$$

$\therefore$ jednotku možno zapísať ako
kubické číslo (obom 0) na 0.

$\therefore$ Na záver je opäť overiť skúškou

Logaritmus

- Logaritmus daného čísla vyjadruje exponent, na ktorý je nutné umocniť základ, aby sme získali logaritmované číslo.

$$a^y = x \Leftrightarrow \log_a x = y$$

Napr. $10^3 = 1000 \Leftrightarrow \log_{10} 1000 = 3$

Poznámka: Ak $a=10 \Rightarrow \log_{10} x \equiv \log x$ (desiatkový)

Ak $a=e \approx 2,718 \Rightarrow \log_e x \equiv \ln x$ (prirodzený)

Pravidlá pre počítanie s logaritmi: (+ príklady)

$$\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$$

$$\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$$

$$\log_a x^n = n \log_a x$$

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a} \quad (\text{kalkulačka})$$

(logaritmus súčinu)

(logaritmus podielu)

Argument logaritmu musí byť vždy ostro väčší ako 0!

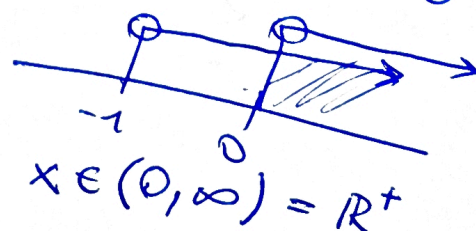
Bales: Čomu sa rovná: $\log_a 1 = ?$
 $\log_a a = ?$

Upravou na logaritmus s rovnakým základom

Teraz môžeme "skrátiť" logaritmy

Na začiatku je potreba učiť, pre aké x má rovnica zmysel

$$\begin{aligned} x+1 &> 0 \wedge x > 0 \\ x &> -1 \wedge x > 0 \end{aligned}$$



$$x \in (0, \infty) = \mathbb{R}^+$$

Skúška:

$$\begin{aligned} L: \log_2(1+1) - \log_2 1 \\ = 1 - 0 = 1 \end{aligned}$$

$$P: = 1 \Rightarrow \underline{L=P}$$

Pr. 5 $\log(x-1) = 2\log 5 + \log 4$

$$\log(x-1) = \log 5^2 + \log 4$$

$$\log(x-1) = \log 25 \cdot 4$$

$$\log(x-1) = \log 100$$

$$x-1 = 100$$

$$x = 101$$

$\therefore$ Máme po jednom logaritme z každého členu na obou stranách

Skúška: $L: \log 100 = 2$
 $P: \log 100$ } $L=P$

(opakujeme postup z prvej rovnice)

Albo riešiť exponenciálne rovnice, ktoré nevieme upraviť na rovnaký základ na oboch stranách? $\Rightarrow$ ZLOGARITMUJEME ICH.

Pr. 6: Riešte rovnice:

$$3^x = 10$$

$$\log 3^x = \log 10$$

$$x \log 3 = \log 10$$

$$x = \frac{1}{\log 3}$$

Zaobruštenie na 4 platné číslice

$$x \approx 2,096$$

$\therefore$ Túto rovnice nevieme upraviť na rovnaký základ, lebo 10 nie je mocninou 3 $\Rightarrow$ nemáme z exponentu musíme dostať zlogaritmovaním

$\rightarrow$ Je jedno, aký zvolíme základ, pokiaľ je rovnaký na oboch stranách (Voline najjednoduchšie desiatkový alebo prirodzený, lebo ten je na kalkulačkách)

Ako uzerajti fce:

$$y = a^x$$

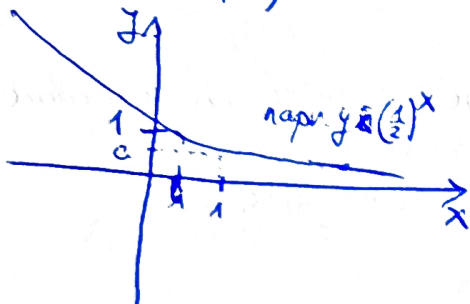
$$a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0, 1\}$$

$$a > 0 \wedge a \neq 1$$

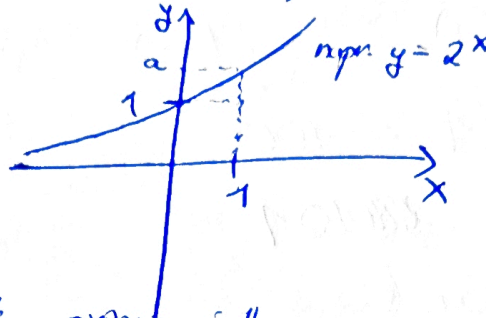
$$D_f = \mathbb{R}$$

$$H_f = (0, \infty) = \mathbb{R}^+$$

$$a \in (0, 1)$$



$$a \in (1, \infty)$$



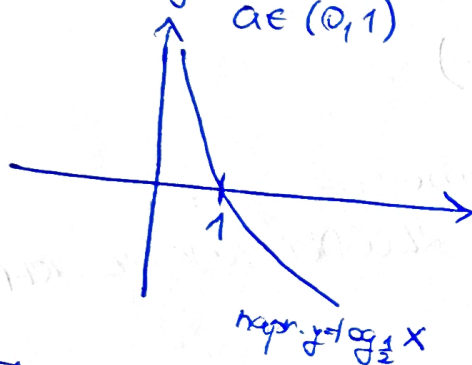
Logaritmus je inverznou fciou k exponenciálle:

$$y = \log_a x$$

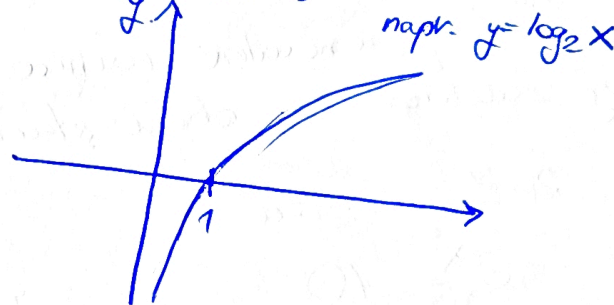
$$a \in (0, 1)$$

$$D_f = \mathbb{R}^+$$

$$H_f = \mathbb{R}$$



$$a \in (1, \infty)$$



Ekonomické aplikácie → aložené úrokovanie

Pr. 7: a) Banka ponúka úrok 3% ročne. Koľko penazi budeme mať na účte za 10 rokov ak vložíme na začiatku 50 000 Kč? (Úrok je stabilný)

za prvý rok

3%

$$2 \cdot 50\,000 + 50\,000 = 51\,500$$

za druhý rok

3%

$$2 \cdot 51\,500 + 51\,500 = 53\,045$$

atď.

Všeobecný vzorec: Nech p je úrok (v %) a S_0 počiatočná vložená suma, n je počet rokov

Na konci 1. roka:

$$S_1 = S_0 + \frac{p}{100} \cdot S_0 = S_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)$$

Na konci 2. roka:

$$S_2 = S_1 + \frac{p}{100} S_1 = S_1 \left(1 + \frac{p}{100}\right) = S_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^2$$

atď.

...

$$S_n = S_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$$

V našom prípade:

$$S_{10} = 50\,000 \left(1 + \frac{3}{100}\right)^{10} \doteq 67\,196 \text{ Kč} \rightarrow \text{lepšie ako geometrické ukladanie}$$

b) Ako dlho musí športár čakať, aby zdvojnásobil svoj kapitál?

Vyjďeme opäť do vzorca:

$$S_n = S_0 \left(1 + \frac{3}{100}\right)^n$$

$\therefore$ Pri zdvojnásobení bude mať sumu $S_n = 2S_0$

$$2S_0 = S_0 \left(1 + \frac{3}{100}\right)^n \quad | : S_0$$

$$2 = \left(1 + \frac{3}{100}\right)^n$$

$\rightarrow$ Neznáma je v exponente
 $\rightarrow$ logaritmujeme

$$\log 2 = \log \left(1 + \frac{3}{100}\right)^n$$

$$\log 2 = n \log \left(1 + \frac{3}{100}\right)$$

$\therefore$ Chceme neznámu n (osamostatníme)

$$n = \frac{\log 2}{\log \left(1 + \frac{3}{100}\right)} \doteq 23,45 \Rightarrow \text{Musí čakať aspoň 24 rokov}$$

Romako sme mohli postupovať dosadením zrejmej sumy:

$$100\,000 = 50\,000 \left(1 + \frac{3}{100}\right)^n \quad | : 50\,000$$

$$2 = \left(1 + \frac{3}{100}\right)^n$$

$\therefore$ postup ten istý

$$n \doteq 23,45$$

Takže už teraz by ste mali byť schopný spočítať Dúž :)

Zhrňme si ešte raz, aké podmienky platia pre def. domy:

- 1) Menovateľ musí byť nenulový.
- 2) Výraz pod párnou odmocniny musí byť rovný či väčší ako nula.
- 3) Výraz, ktorý logaritmujeme musí byť väčší ako 0.

Pr 8, Určte definický obor funkcie:

$$y = \log \frac{3-x}{x^2-16} + e^{2x}$$

Podmienka 1 $\rightarrow x^2 - 16 \neq 0$

$$x^2 \neq 16$$

$$x \neq \pm 4$$

Podmienka 3 $\rightarrow \frac{3-x}{x^2-16} > 0$

NB: $3, -4, 4$ $(-\infty, -4) \quad (-4, 3) \quad (3, 4) \quad (4, \infty)$
 $\oplus \quad - \quad \oplus \quad -$

Volíme číslo z intervalu a hľadáme znamienko čísla:
 $\Rightarrow D_f = (-\infty, -4) \cup (3, 4)$

Pr 9 $y = \frac{\sqrt[3]{x^2-6x+9}}{x-2}$

Pozor chytké $\rightarrow$ máme tu nepárnu odmocninu $\rightarrow$ tam môže byť výraz pod mŕou záporný $\Rightarrow$ preto podmienka je menovateľ $\Rightarrow D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

Pr 9* $y = \sqrt{\log_2 \frac{x}{2}}$ $\begin{cases} \frac{x}{2} > 0 \\ \log_2 \frac{x}{2} \geq 0 \end{cases} \xrightarrow{x > 0} \log_2 \frac{x}{2} \geq \log_2 1 \quad x \geq 2 \quad D_f = [2, \infty)$

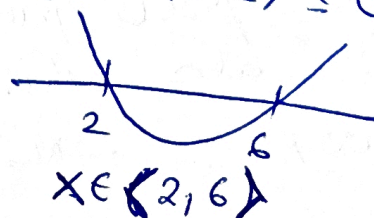
Pr 10, Určte definický obor funkcie, jej presečníky s osami a intervaly

$$y = \frac{\sqrt{-2x^2+16x-25}}{x-5}$$

$D_f: x-5 \neq 0$
 $x \neq 5$

$$\begin{aligned} -2x^2+16x-25 &\geq 0 \\ x^2-8x+12 &\leq 0 \\ (x-6)(x-2) &\leq 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow D_f = [2, 6] - \{5\}$



Priesečník s osou y: $x=0$ $y = \frac{\sqrt{-2 \cdot 0^2 + 16 \cdot 0 - 24}}{0-5}$
 $\downarrow$
 nie je ~~def.~~ def. dom. $\rightarrow$ záporný výraz pod $\sqrt{}$
 $\rightarrow$ priesečník s osou y nie je

Priesečník s osou x: $y=0$ $0 = \frac{\sqrt{-2x^2 + 16x - 24}}{x-5}$

Aby bol zlomok nulový, musí byť čitateľ nulový

$$\Rightarrow \sqrt{-2x^2 + 16x - 24} = 0$$

$$-2x^2 + 16x - 24 = 0$$

$$\cancel{2} x^2 - 8x + 12 = 0$$

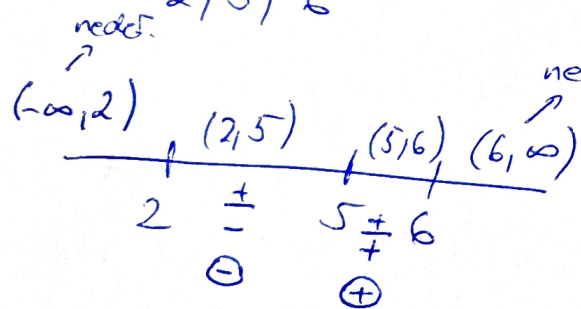
$$(x-6)(x-2) = 0$$

$$x=6 \text{ alebo } x=2$$

$$\Rightarrow P_x = [6, 0] \cup [2, 0]$$

Aby sme určili znamienko fcie opäť rozdelíme na intervaly medzi nulovými bodmi.

NB: 2, 5, 6



$$y = \frac{\sqrt{-2(x-6)(x-2)}}{x-5}$$

Na intervale $(2, 5)$ je záporná
 Na intervale $(5, 6)$ je kladná.

Bonus: Skúste povedať ako bude vyzeráť
 $\lim_{x \rightarrow 5^-} y(x)$ resp. $\lim_{x \rightarrow 5^+} y(x)$.