CVIČENIE 13 – MATEMATIKA A

↳ vráťme sa ku chybe z minula... nikto ma na to neupozornil. **Preto ešte 1 pr.**

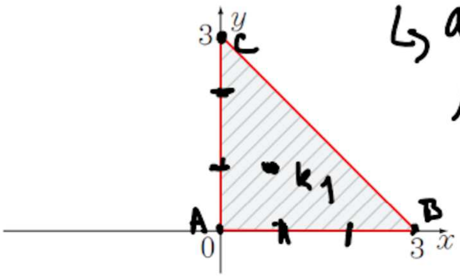
↳ VRCHOLY NESMIEME RÁTAŤ DO STRÁN!

PR.: Nájdite globálne extrémy funkcie

$$z = f(x,y) = x^2 - 2y^2 + 4xy - 6x - 1$$

na množine M.

$$M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0 \wedge y \geq 0 \wedge y \leq -x+3\}$$



↳ ak si nakreslíme, zistíme, že M je trojuholník s vrcholmi $A=[0,0]$; $B=[3,0]$ a $C=[0,3]$.

↳ Najprv hľadáme kandidátov na extrém vo vnútri definičnej množiny M.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + 4y - 6 = 0$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = -4y + 4x = 0$$

$y = x$

$2x + 4x = 6$

$\underline{x = 1}$

↳ riešením je $K_1 = [1,1]$.

⇒ Ďalej riešime hranicu:

↳ je tvorená 3 úsečkami:

↳ $x=0$; $y \in (0,3)$ | $y = -x+3$; $x \in (0,3)$

$y=0$; $x \in (0,3)$

1.) $g(x,y) = x = 0$ pre $y \in (0,3)$

$$f(y) = -2y^2 - 1$$
$$f'(y) = -4y = 0 \Rightarrow y = 0 \notin (0,3)$$

⇒ nemáme extrém

2.) $g(x,y) = y = 0$, $x \in (0,3)$

$$f(x) = x^2 - 6x - 1$$
$$f'(x) = 2x - 6 = 0 \Rightarrow x = 3 \Rightarrow x \notin (0,3)$$

⇒ nemáme kandidáta na viaz. extrém

3.) $g(x,y) = y + x - 3 = 0$, pre $x \in (0,3)$

↳ do f budeme dosadzovať: $\boxed{y = -x+3}$

$$f(x, -x+3) = x^2 - 2\cdot(-x+3)^2 + 4\cdot x(-x+3) - 6x - 1$$
$$= -5x^2 + 18x - 19$$
$$f'(x) = -10x + 18 = 0 \Rightarrow x = \frac{9}{5} \in [0,3)$$

↳ našli sme $K_2 = \left[\frac{9}{5}, \frac{6}{5}\right]$

+ ∀ vrcholy sú kandidáti na extrém

$K_1 = [1,1] \to f(K_1) = f(1,1) = -4$

$K_2 = \left[\frac{9}{5}, \frac{6}{5}\right] \to f(K_2) = -\frac{14}{5}$

$A = [0,0] \to f(A) = -1 \to$ MAXIMUM

$B = [3,0] \to f(B) = -10$

$C = [0,3] \to f(C) = -19 \to$ MINIMUM

PR: Majme $f(x,y) = 3x - 4y + 23$

a väzbu $g(x,y) = x^2 + 2y^2 - 17 = 0$

nájdite ∀ viaz. extrémy na množine.

↳ DOSADZOVACIA METÓDA NIEJE KÁMOŠ!

↳ LM

JAC

$\partial_x f = 3 \; ; \; \partial_y f = -4 \;\; | \;\; \partial_x g = 2x \; ; \; \partial_y g = 4y$

$$\det J = \begin{vmatrix} \partial_x f & \partial_y f \\ \partial_x g & \partial_y g \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 2x & 4y \end{vmatrix} =$$

$$= 3 \cdot 4y - 2x \cdot (-4) = 12y + 8x = 0$$

$$8x = -12y \Rightarrow x = -\frac{12}{8}y = -\frac{3}{2}y$$

$$g(x,y) = x^2 + 2y - 17 = 0$$

$$= \left(-\frac{3}{2}y\right)^2 + 2y^2 - 17 = 0$$

$$= \frac{9}{4}y^2 + 2y^2 - 17 = 0 \;/\cdot 4$$

$$9y^2 + \underbrace{2 \cdot 4}_{8} y^2 - 17 \cdot 4 = 0$$

$$17y^2 - 17 \cdot 4 = 0 \;/:17$$

$$y^2 - 4 = 0$$

$$y = \underline{\underline{\pm 2}}$$

$$y_1 = 2 \Rightarrow x_1 = -3 \;|\; y_2 = -2 \Rightarrow x_2 = +3$$

$$f(-3,2) = 3 \cdot x - 4y + 23 = -9 - 8 + 23 = 6 \quad \text{MIN}$$

$$f(3,-2) = 9 + 8 + 23 = 40 \quad \text{MAX}$$

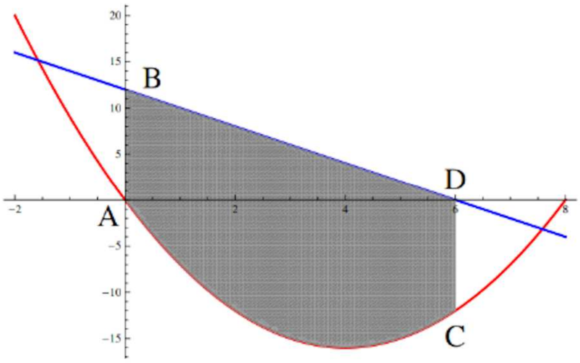
PR. Nájdite extrémy funkcie

$$f(x,y) = 2x - y + 12$$

na množine

$$M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 6,\ x^2 - 8x \leq y \leq 12 - 2x\}.$$

$$x \in \langle 0, 6 \rangle$$



$\partial_x f = 2 \neq 0$

↳ nemáme vo vnútri M° extrém.

AB: $x = 0$

$f(x,y) = f(0,y) = -y + 12$

$f'(y) = -1 \neq 0$

↳ nemáme extrémy

BD: $y = 12 - 2x$, $x \in (0, 6)$

$f(x, 12-2x) = 2x - (12 - 2x) + 12$

$= 4x \Rightarrow f'(x) = 4 \neq 0$

↳ nemáme extrém

CD: $x = 6$

$f(6,y) = 12 - y + 12 = 24 - y$

$f'(y) = -1 \neq 0$

↳ nemáme extrémy

AC: $y = x^2 - 8x$;

$x \in (0, 6)$

$h(x) = f(x, x^2 - 8x) =$

$= 2x - (x^2 - 8x) + 12 = -x^2 + 10x + 12$

$h'(x) = -2x + 10 = 0 \Rightarrow x = 5$

$\Rightarrow y = 25 - \underbrace{8 \cdot 5}_{40} = \underline{-15}$

$K = [5, -15] \Rightarrow f(5, -15) = 2 \cdot 5 - (-15) + 12 = \underline{37} \to \underline{MAX}$

$A = [0,0] \to f(0,0) = 12$

$B = [0,12] \to f(0,12) = 0 \to \underline{\underline{MIN}}$

$C = [6,-12] \to f(6,-12) = 36$

$D = [6,0] \to f(6,0) = 24$

PR. $f(x,y,z) = 4x + y - 2z$ → ide aj Jac aj LM!

$M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 ; x^2 + y^2 + z^2 = 54 ; x - y + z + 10 = 0\}$

JAC ila ak je počet väzieb o 1 menší než počet premenných!

$g_1(x,y) = x^2 + y^2 + z^2 - 54 = 0 \Rightarrow$ guľa

$g_2(x,y) = x - y + z + 10 = 0 \to$ rovina

$L = f + \lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2 \mid \underline{\underline{\nabla L = 0}}$

$\frac{\partial L}{\partial x} = 4 + \lambda_1 \cdot 2x + \lambda_2 = 0$

$\frac{\partial L}{\partial y} = 1 + \lambda_1 \cdot 2y - \lambda_2 = 0$

$\frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = g_1(x,y) = x^2 + y^2 + z^2 - 54 = 0$

$\frac{\partial L}{\partial \lambda_2} = g_2(x,y) = x - y + z + 10 = 0$

$\frac{\partial L}{\partial z} = -2 + \lambda_1 \cdot 2z + \lambda_2 = 0$

$\Rightarrow x = \frac{-\lambda_2 - 4}{2\lambda_1} \quad \Big| \quad y = \frac{-1 + \lambda_2}{2\lambda_1} \quad \Big| \quad z = \frac{2 - \lambda_2}{2\lambda_1}$

$$\frac{-\lambda_2-4}{2\lambda_1} - \left(\frac{-1+\lambda_2}{2\lambda_1}\right) + \frac{2-\lambda_2}{2\lambda_1} = -10$$

$$\frac{-\lambda_2-4+1-\lambda_2+2-\lambda_2}{2\lambda_1} = -10 \Rightarrow \lambda_1 = \frac{-3\lambda_2-1}{-20}$$

$$\left(\frac{-\lambda_2-4}{2\lambda_1}\right)^2 + \left(\frac{-1+\lambda_2}{2\lambda_1}\right)^2 + \left(\frac{2-\lambda_2}{2\lambda_1}\right)^2 = 54$$

$$\Leftrightarrow \frac{(\lambda_2^2+8\lambda_2+16+\lambda_2^2-2\lambda_2+1+4-4\lambda_2+\lambda_2^2)}{4\lambda_1^2} = 54$$

$$\frac{3\lambda_2^2+2\lambda_2+21}{4\cdot\left(\frac{-3\lambda_2-1}{-20}\right)^2} = 54$$

$$3\lambda_2^2+2\lambda_2+21 = 54\cdot4\cdot\left(\frac{-3\lambda_2-1}{-20}\right)^2$$

$$3\lambda_2^2+2\lambda_2+21 = \frac{54\cdot\cancel{4}}{\cancel{400}\cdot4}\cdot(9\lambda_2^2+6\lambda_2+1) = \frac{27}{50}\cdot(9\lambda_2^2+6\lambda_2+1)$$

$$3\lambda_2^2+2\lambda_2+21 = \frac{27}{50}\cdot(9\lambda_2^2+6\lambda_2+1) \quad |\cdot 50$$

$$150\lambda_2^2+100\lambda_2+1050 = 27\cdot9\lambda_2^2+27\cdot6\lambda_2+27$$

$$\underbrace{(150-243)}_{-93}\lambda_2^2 + \underbrace{(100-162)}_{-62}\lambda_2 + \underbrace{1023}_{} = 0 \quad |:31$$

$$+3\lambda_2^2 + 2\lambda_2 - 33 = 0$$

$$\lambda_2 = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 4\cdot 3\cdot 33}}{2\cdot 3} =$$

$$= \frac{-2 \pm \sqrt{4+396}}{2\cdot 6} = \frac{-2 \pm 20}{6} = \begin{cases} \frac{-22}{6} = -\frac{11}{3} \\ \frac{18}{6} = 3 \end{cases}$$

2 RIEŠENIA PRE λ_2 dajú 2 rieš. pre λ_1:

$$\lambda_2 = 3 \Rightarrow \lambda_1 = \frac{-3\cdot(3)-1}{-20} = \frac{1}{2}$$

$$\lambda_2 = -\frac{11}{3} \Rightarrow \lambda_1 = -3\cdot\left(-\frac{11}{3}\right) - 1 = -\frac{1}{2}$$

... a následne 2 riešenia pre x, y aj z:

$$x_1 = \frac{-\lambda_2 - 4}{2\lambda_1} = \frac{-3-4}{1} = -7 \qquad y_1 = \frac{-1+\lambda_2}{2\lambda_1} = \frac{-1+3}{1} = 2$$

$$x_2 = \frac{\frac{11}{3} - 4}{-1} = -\frac{1}{3}\cdot(-1) = \frac{1}{3} \qquad y_2 = \frac{-1-\frac{11}{3}}{-1} = +\frac{14}{3}$$

$$z_1 = \frac{2-\lambda_2}{2\lambda_1} = \frac{2-3}{1} = -1 \qquad z_2 = \frac{2-\left(-\frac{11}{3}\right)}{-1} = \frac{\frac{6}{3}+\frac{11}{3}}{-1} = -\frac{17}{3}$$

Riešením sú teda 2 body:

$[x_1, y_1, z_1]$ $\quad$ $[x_2, y_2, z_2]$

$$[-7, 2, -1] \text{ a } \left[\frac{1}{3}, \frac{14}{3}, -\frac{17}{3}\right]$$

$f = 4x + y - 2z$

$$f(-7,2,-1) = 4\cdot(-7) + 2 - 2\cdot(-1) = -24 \quad \text{MINIMUM}$$

$$f\left(\frac{1}{3}, \frac{14}{3}, -\frac{17}{3}\right) = 4\cdot\left(\frac{1}{3}\right) + \frac{14}{3} - 2\cdot\left(-\frac{17}{3}\right) = \frac{4}{3} + \frac{14}{3} + \frac{34}{3} = \frac{52}{3} \quad \text{MAXIMUM}$$

Príklad: [2]Firma produkuje dva statky, pivo označíme Q_1 a pizzu Q_2, ktorým zodpovedajú ceny piva P_1 a pizze P_2. Produkčné funkcie majú tvar

$$P_1 = 40 - 2Q_1 + 4Q_2$$

a druhá

$$P_2 = 20 + 2Q_1 - 2Q_2.$$

Celkové náklady označme TC sú dané rovnicou

$$TC = 24Q_1 + 2Q_1Q_2 + 12Q_2. \tag{4.2.1}$$

Firma môže vyprodukovať za deň celkovo 20 produktov. Aký najvyšší profit môže firma dosiahnuť ?

$$\pi = TR - TC$$

$$TR = P_1 Q_1 + P_2 \cdot Q_2$$

$$Q_1 + Q_2 = 20$$

$$TR = (40 - 2Q_1 + 4Q_2) \cdot Q_1 + (20 + 2Q_1 - 2Q_2) \cdot Q_2$$

$$TR = 40Q_1 - 2Q_1^2 + 4Q_2Q_1 + 20Q_2 + 2Q_1Q_2 - 2Q_2^2$$

$$\pi = 40Q_1 - 2Q_1^2 + 4Q_2Q_1 + 20Q_2 + 2Q_1Q_2 - 2Q_2^2 - 24Q_1 - 2Q_1Q_2 - 12Q_2$$

$$\boxed{\pi = 16Q_1 + 4Q_1Q_2 + 8Q_2 - 2Q_1^2 - 2Q_2^3}$$ ÚČELOVÁ FUNKCIA

PODMIEKA: $20 = Q_1 + Q_2$

$$f(x,y) = 16x + 4xy + 8y - 2x^2 - 2y^2$$

$$g(x,y) = x + y - 20 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 16 + 4y - 4x + \lambda = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = 8 - 4y + 4x + \lambda = 0$$

$$x + y - 20 = 0$$

$$\lambda = 4x - 4y - 16 = -8 + 4y - 4x$$

$$8 = 8x - 8y$$

$$\underline{x - y = 1}$$

$$x - y = 1$$

$$x + y = 20$$

$$2x = 21 \Rightarrow x = 10{,}5$$

$$y = 9{,}5$$

$$f(10{,}5; 9{,}5) = \underline{\underline{242}}$$

(π)

PRÍDAVOK (Z BC. práce MASLONKA, T., 2014)

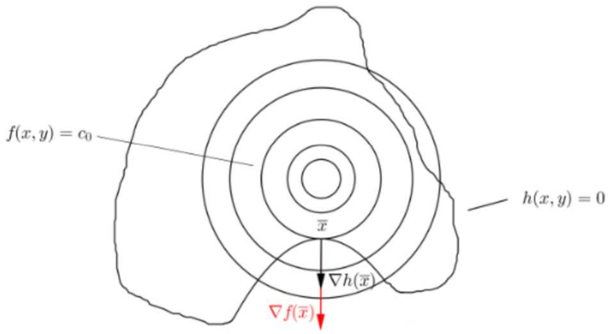
Geometrický význam viazaného extrému

Majme úlohu nájsť najväčšiu hodnotu $z = f(x,y)$ pre body $[x,y]$ ktoré ležia na krivke $h(x,y) = 0$ (hľadáme viazaný extrém funkcie f s podmienkou h). Treba si uvedomiť že $h(x,y) = 0$ je krivka v rovine, ktorú zvierajú súradnicové osi x a y. A v bodoch tejto krivky hľadáme napr. najmenšiu hodnotu $z = f(x,y)$, to znamená najmenšiu hodnotu "výšky"nad daným bodom $[x,y]$ z krivky $h(x,y) = 0$. Ak by sme poznali najmenšiu hodnotu „výšku“ napr. $z = c_0$. Potom pre $c < c_0$ neexistuje žiaden bod na krivke $h(x,y) = 0$ pre ktorý by platilo $f(x,y) = z$.

Krivky $f(x,y) = c$ označujeme aj pojmom vrstevnice. Ak by sme postupne zvyšovali hodnotu c, teda by sme sa blížili k c_0 zľava, tak sa vrstevnice $f(x,y) = c$ blížia v rovine, ktorú zvierajú osi x a y ku krivke $h(x,y) = 0$. Z toho plynie, že hodnota c_0 je najmenšou hodnotou, pre ktorú vrstevnice dosiahnu krivku $h(x,y) = 0$ v nejakom bode $\overline{x} = [x,y]$. Tento bod je bodom dotyku vrstevnice $f(x,y) = c_0$ a krivkou $h(x,y) = 0$. To ale znamená, že v tomto bode majú aj krivka $h(x,y) = 0$ a vrstevnica $f(x,y) = c_0$ spoločnú dotyčnicu a aj ich normálové vektory su rovnobežné. Vieme, že normálový vektor vrstevnice $f(x,y) = c_0$ v danom bode $\overline{x} = [x,y]$ je práve gradient $\nabla f(\overline{x})$. A aj normálový vektor krivky $h(x,y) = 0$ v bode $\overline{x} = [x,y]$ je $\nabla h(\overline{x})$. Keďže tieto vektory sú rovnobežné, takže sú aj lineárne závislé, preto existuje λ (Lagrangeov multiplikátor) a platí

$$\nabla f(\overline{x}) = \lambda \nabla h(\overline{x}).$$

Grafická interpretácia viz. (4.1).



Obrázok: 4.1: Geometrický význam

4.2.1 Príklad č.1

Príklad: [2]Firma produkuje dva statky, pivo označíme Q_1 a pizzu Q_2, ktorým zodpovedajú ceny piva P_1 a pizze P_2. Produkčné funkcie majú tvar

$$P_1 = 40 - 2Q_1 + 4Q_2$$

a druhá

$$P_2 = 20 + 2Q_1 - 2Q_2.$$

Celkové náklady označme TC sú dané rovnicou

$$TC = 24Q_1 + 2Q_1Q_2 + 12Q_2. \qquad (4.2.1)$$

Firma môže vyprodukovať za deň celkovo 20 produktov. Aký najvyšší profit môže firma dosiahnuť ?

Riešenie: Najprv si musíme uvedomiť, aká je naša účelová funkcia a musíme si správne stanoviť podmienky. Profit, ktorý sa budeme snažiť maximalizovať, vypočítame zo vzťahu

$$\pi = TR - TC.$$

Je zrejmé že budeme mať jedinú podmienku $20 = Q_1 + Q_2$. Ešte nám ostáva určiť príjem firmy TR , ktorý vypočítame, keď množstvá jednotlivých statkov vynásobíme ich cenou, $TR = P_1Q_1 + P_2Q_2$. Do rovnice príjmu dosadíme P_1, P_2 a dostávame

$$TR = (40 - 2Q_1 + 4Q_2)Q_1 + (20 + 2Q_1 - 2Q_2)Q_2,$$

túto rovnicu roznásobíme a upravíme na

$$TR = 40Q_1 - 2Q_1^2 + 6Q_1Q_2 + 20Q_2 - 2Q_2^2. \qquad (4.2.2)$$

Keďže konečný príjem je daný $\pi = TR - TC$, tak do tejto rovnice dosadíme (4.2.1) a (4.2.2). Tým dostaneme

$$\pi = (40Q_1 - 2Q_1^2 + 6Q_1Q_2 + 20Q_2 - 2Q_2^2) - (24Q_1 + 2Q_1Q_2 + 12Q_2)$$

a po úprave

$$\pi = 16Q_1 + 4Q_1Q_2 + 8Q_2 - 2Q_1^2 - 2Q_2^2.$$

Toto bude naša účelová funkcia. Pripomeňme, že podmienka je v tvare

$$20 - Q_1 - Q_2 = 0.$$

Lagrangeova funkcia má teda tvar

$$L(Q_1,Q_2,\lambda) = 16Q_1 + 4Q_1Q_2 + 8Q_2 - 2Q_1^2 - 2Q_2^2 - \lambda(20 - Q_1 - Q_2).$$

Teraz nájdeme stacionárny bod. Ten musí spĺňať sústavu rovníc

$$\frac{\partial L}{\partial Q_1} = 16 + 4Q_2 - 4Q_1 + \lambda = 0, \qquad (4.2.3)$$

$$\frac{\partial L}{\partial Q_2} = 8 - 4Q_2 + 4Q_1 + \lambda = 0, \qquad (4.2.4)$$

$$20 - Q_1 - Q_2 = 0.$$

Z rovníc (4.2.3) a (4.2.4) dostaneme že

$$\lambda = 4Q_1 - 4Q_2 - 16 = 4Q_2 - 4Q_1 - 8$$

preto

$$8Q_1 - 8Q_2 = 8$$

a po vykrátení

$$Q_1 - Q_2 = 1. \qquad (4.2.5)$$

Teraz už riešime iba sústavu dvoch rovníc s dvoma neznámymi

$$Q_1 - Q_2 = 1,$$
$$Q_1 + Q_2 = 20.$$

Použitím sčítacej metódy ihneď dostaneme

$$2Q_1 = 21$$

a po dosadení do rovnice podmienky obdržíme, že $Q_1 = 10,5$ a $Q_2 = 9,5$. Zostrojíme $L''(10.5, 9.5)$ aby sme zistili či sa v bode $[10.5, 9.5]$ nachádza lokálne maximum

$$\begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}.$$

Hlavné minory sú -4 a 0 matica je negatívne semidefinitná preto ide bod lokálneho maxima. Tieto hodnoty su množstva jednotlivých statkov, v našom prípade pivo a pizza, ktoré maximalizujú zisk. Tieto hodnoty použijeme v (4.2.1), t.j.

$$\pi = 16 \cdot 10.5 + 4 \cdot 10.5 \cdot 9.5 + 8 \cdot 9.5 - 2 \cdot 10.5^2 - 2 \cdot 9.5^2 = 242$$

Firma pri produkcii iba týchto statkov môže dosiahnuť maximalný zisk 242.

4.2.3 Príklad č.2

Príklad: Spoločnosť chce prerozdeliť 600 000€ na reklamu, respektíve na výskum. Táto spoločnosť odhaduje, že minie x tisíc eur na reklamu a y tisíc na výskum, ďalej predpokladajú že investície do reklamy a výskumu sa prejavia v oboch ich výrobkoch tak, že predajú $30x^{4/5}y^{1/3}$ ich výrobkov. V akom pomere musí táto spoločnosť investovať svoj kapitál do výskumu a do reklamy, aby maximalizovala predaj ?

Riešenie: Účelová funkcia má tvar

$$f(x,y) = 30x^{4/5}y^{1/3}$$

a podmienka je

$$x + y = 600.$$

Lagrangeova funkcia má teda tvar

$$L(x,y,\lambda) = 30x^{4/5}y^{1/3} - \lambda(x + y - 600).$$

Stacionárny bod získame z rovníc

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 24x^{-1/5}y^{1/3} - \lambda = 0, \qquad (4.2.6)$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = 10x^{4/5}y^{-2/3} - \lambda = 0, \qquad (4.2.7)$$

$$x + y - 600 = 0.$$

Z rovníc (4.2.6) a (4.2.7) vyplýva

$$\lambda = 24x^{-1/5}y^{1/3} = 10x^{4/5}y^{-2/3}.$$

Úpravou dostávame $x = 2,4y$ a po dosadení do podmienky obdržíme

$$2.4y + y = 600,$$

teda

$$y = 176,47.$$

Z toho vyplýva že

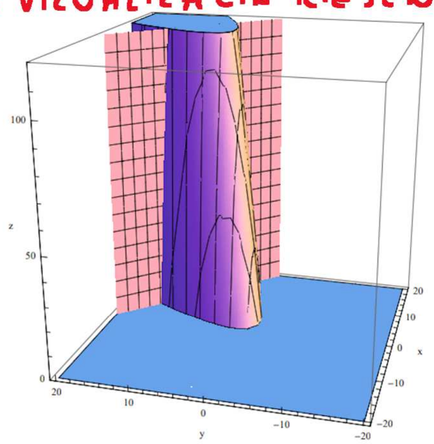
$$x = 600 - 176,47 = 423,53.$$

Zostrojíme $L''(423.53, 176.47)$ aby sme zistili či ide o lokálne minimum

$$\begin{vmatrix} -0.0449072 & 0.075846 \\ 0.075846 & -0.151693 \end{vmatrix}.$$

Hlavné minory sú -0.0449072 a 0.101033 to znamená že matica je negatívne definitná. Bod $[423.53, 176.47]$ je bod lokálneho maxima. Aby spoločnosť maximalizovala predaj svojho výrobku mala by do reklamy investovať 423 530€ a do vývoja 176 470€.

GRAF. VIZUALIZÁCIA RIEŠENIA PR. Č. 1



Obrázok: 4.4: Účelová funkcia s podmienkou