Viazané extrémy

- jedná sa o hľadanie extrémov, ktoré sú obmedzené nejakou podmienkou (najčastejšie hľadáme extrémy spojitej funkcie na kompaktnej množine). → Podľa Weierstrapovej vety, tento vždy existuje

Metódy, ktoré budeme používať:
1) DOSADZOVACIA
2) LAGRANGEOVE MULTIPLIKÁTORY

A) DOSADZOVACIA METÓDA – vhodná pre podmienky, kde možno jednoducho vyjadriť $y = f(x)$ (napríklad na mnohouholníkoch).

Pr 1:

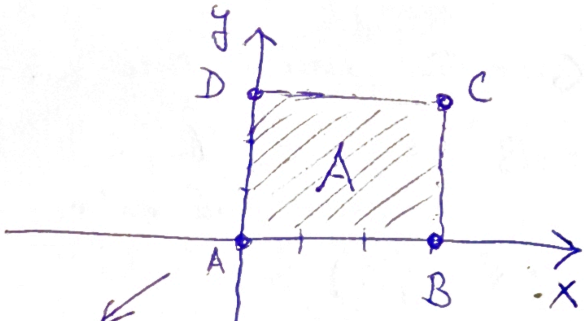
Určte extrémy funkcie:

$$f(x,y) = x^2 - 2y^2 + 4xy - 6x - 1$$

na množine, ktorá je daná bodmi

$A = [0,0]$ $B = [3,0]$ $C = [3,3]$ $D = [0,3]$

- Nakreslime si našu množinu: → Jedná sa o obdĺžnik, musíme určiť podmienky (väzby), niekedy ich dostaneme zadané.



Naša Fcia $f(x,y)$ sa nachádza v 3D Euklidovskom priestore (viď. minule)

Naša množina A:
- $\langle 0,3 \rangle \times \langle 0,3 \rangle$ ↳ karteziánsky súčin
- $\{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 3;\ 0 < y < 3\}$

Čo môžu byť extrémy:
I) Body vo vnútri ($[x,y] \in A^\circ$)
II) Body na stranách mnohouholníka (body na hranici množiny $[x,y] \in \partial A$)
III) Vrcholy mnohouholníka

I) Pre body $[x,y] \in M^\circ$ riešime „klasicky" tak, že nájdeme stacionárne body našej fcie a vyberieme z nich také, ktoré vyhovujú našej podmienke.

podmienka stac. bodov

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + 4y - 6 = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -4y + 4x = 0$$

sústava $\longrightarrow$

I) $2x + 4y = 6$

II) $4x - 4y = 0$ $\Big> +$

$6x = 6$

$x = 1$

dosadím do I

$2 \cdot 1 + 4 \cdot y = 6$

$2 + 4y = 6$

$4y = 4$

$y = 1$

Bod $[1,1]$ je kandidát na extrém, lebo leží vo vnútri.

II) Na jednotlivých stranách dosádzame podmienku do rovnice:

- Strana AB: platí: $x \in (0,3) \wedge y = 0$

Môžeme dosadiť: $f(x,y) = x^2 - 6x - 1 = h_1(x)$ Fcia jednej premennej

Nájdeme jej extrém $h_1'(x) = 2x - 6 = 0$

$x = 3 \Rightarrow$ Bod $[3,0]$ môže byť extrém

- Strana BC: platí $x = 3 \wedge y \in (0,3)$

$f(x,y) = 9 - 2y^2 + 12y - 18 - 1 = -2y^2 + 12y - 10 = g_1(y)$

$g_1'(y) = -4y + 12 = 0$

$y = 3 \Rightarrow$ Bod $[3,3]$ je možný kandidát

- Strana CD: platí $y = 3 \wedge x \in (0,3)$

$f(x,y) = x^2 - 18 + 12x - 6x - 1 = x^2 + 6x - 19 = h_2(x)$

$h_2'(x) = 2x + 6 = 0 \Rightarrow$ Ale bod $[-3,3]$ neleží v našej množine, nie je to kandidát

$x = -3$

• Napokon strana AD: platí $x = 0$ a $y \in (0,3)$

$$f(x,y) = -2y^2 - 1 = g_2(y)$$

$$g_2'(y) = -4y = 0$$

$$y = 0$$

$\Rightarrow$ Bod $[0,0]$ je posledný kandidát

III) Vrcholy sú vždy kandidáti, máme $[0,0], [0,3], [3,3], [3,0]$

$\hookrightarrow$ Vo všeobecnosti sa hľadajú vrcholy ako priesečníky dvoch funkcií (z rovnosti funkcií)

$\Rightarrow$ Spolu máme $[0,0], [0,3], [3,3], [3,0], [1,1]$

Dosadíme a rozhodneme podľa funkčnej hodnoty:

$f(0,0) = -1$

$f(0,3) = -2 \cdot 3^2 - 1 = -19$ $\Rightarrow$ Toto je min

$f(3,3) = 9 - 2 \cdot 9 + 4 \cdot 9 - 6 \cdot 3 - 1 = 8$ $\Rightarrow$ Toto je max.

$f(3,0) = 9 - 6 \cdot 3 - 1 = -10$

$f(1,1) = \cancel{1} - 2 + 4 - 6 - \cancel{1} = -4$

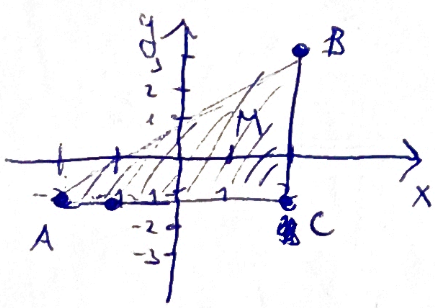
Fcia má minimum v bode $[0,3]$ a maximum v $[3,3]$.

Pr. 2.

Určte extrémy funkcie

$f(x,y) = x^2 + 4y^2$ na množine danej bodmi

$A = [-2,-1]$ $B = [2,3]$ $C = [2,-1]$



Množina M:

$\{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : -2 < x < 3;\ -1 < y < x+1\}$

I) Extrémy vo vnútrajšku množiny M^0:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x = 0$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = 8y = 0$$
$\Rightarrow$ $x = 0$, $y = 0$ $\Rightarrow$ Bod $[0,0]$ je kandidát na extrém

II) Hranice DM:

- Strana AC: $y = -1$

$$f(x,-1) = x^2 + 4 = h_1(x)$$
$$h_1'(x) = 2x = 0$$
$$x = 0$$
$\Rightarrow$ Bod $[0,-1]$ je kandidát na extrém

- Strana BC: $x = 2$

$$f(2,y) = 4 + 4y^2 = h_2(y)$$
$$h_2'(y) = 8y = 0$$
$\Rightarrow$ Bod $[2,0]$ je kandidát na extrém

- Strana AB:

- Prechádza bodmi $A=[-2,-1]$ $B = [2,3]$

↳ Musíme nájsť rovnicu priamky, ktorá prechádza danými bodmi (viď cvičenie 1)

t: $y = ax + b$

$A \in t$: $-1 = -2a + b$

$B \in t$: $3 = 2a + b$ $\Big\rangle +$

$2 = 2b \Rightarrow b = 1$

$-1 = -2a + 1$

$-2 = -2a$

$a = 1$

priamka $y = x + 1$ $\quad y = -\frac{4}{5} + 1$

$$f(x, x+1) = x^2 + 4(x+1)^2 = x^2 + 4x^2 + 8x + 4$$
$$= 5x^2 + 8x + 4 = h_3(x)$$

$h'(x) = 10x + 8 = 0 \Rightarrow x = -\frac{8}{10} = -\frac{4}{5}$

$\left[-\frac{4}{5}, \frac{1}{5}\right]$ je možný extrém

4

III) Samotné vrcholy sú kandidáti:

Spolu: $[0,0]$, $[0,-1]$, $[2,0]$, $[-\frac{4}{5}, \frac{1}{5}]$, $[-2,1]$, $[2,-1]$, $[2,3]$

$F(0,0) = 0 \rightarrow$ MINIMUM

$F(0,-1) = 4$

$F(2,0) = 4$

$F(-\frac{4}{5}, \frac{1}{5}) = (-\frac{4}{5})^2 + 4(\frac{1}{5})^2 = \frac{16}{25} + \frac{4}{25} = \frac{20}{25} = \frac{4}{5}$

$F(-2,1) = 4 + 4 = 8$

$F(2,-1) = 8$

$F(2,3) = 4 + 4 \cdot 9 = 40 \rightarrow$ MAX.

MAXIMUM FCIE JE V BODE $[2,3]$ a MINIMUM v bode $[0,0]$

- Takto by sme vedeli zadať ľubovoľný mnohouholník, dôležité je správne zapísať rovnicu väzby.
  - ↳ Skúste sami natrénovať na DÚ 16.