Metóda Lagrangeových multiplikátorov:

FEEDBACK

Konštruujeme Lagrangeovu fciu $f = f(x,y)$ a $g: g(x,y) = 0$

fcia — väzba

$$\boxed{L(x,y,\lambda) = f(x,y) \pm \lambda g(x,y)}$$

diskutovať znamienko

Lagrangeov multiplikátor (existuje jeho geometrický význam a aplikácia v ekonómii)

→ Metóda sa používa všeobecne pre akúkoľvek fciu a väzbu s akou sa stretneme, ale špeciálne tam, kde nedokážeme spočítať úlohu dosadzovacou metódou → (mimo lineárnych väzieb). Väzba vždy v tvare s nulovou pravou stranou!

BONUS: skúste za DÚ

Následne riešime sústavu rovníc:

$$\boxed{\frac{\partial L}{\partial x} = 0 \qquad \frac{\partial L}{\partial y} = 0 \qquad \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0} \rightarrow \text{vždy nechá väzbu}$$

Nakresliť fcie v geogebre!

Pr.1 Nájdite extrémy fcie $f(x,y) = 81x^2 + y^2$ na väzbe: $L(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda g(x,y)$ $g(x,y): 4x^2 + y^2 = 9$

nelineárna väzba

ELIPSA $a = \frac{3}{2}$ $b = 3$

↳ urobiť odbočku ku kružnici → cv. 11

$$L(x,y,\lambda) = 81x^2 + y^2 + 4\lambda x^2 + \lambda y^2 - 9\lambda$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 162x - 8\lambda x$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = 2y + 2\lambda y$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 4x^2 + y^2$$

Sústava →

I.) $162x + 8\lambda x = 0$

II.) $2y + 2\lambda y = 0$

III.) $4x^2 + y^2 - 9 = 0$

z I.): $x(162 + 8\lambda) = 0$ → $x = 0$, $\lambda = -\frac{162}{8} = -\frac{81}{4}$

z II.): $y(2 + 2\lambda) = 0$ → $y = 0$, $\lambda = -1$

• Ak $y = 0$: $4x^2 = 9 \Rightarrow$

$x = \pm \frac{3}{2}$

• Ak $x = +\frac{3}{2} \longrightarrow$ I) $162 \cdot \frac{3}{2} + 8\lambda \cdot \frac{3}{2} = 0$

$$\lambda = -\frac{162}{8} = -\frac{81}{4}$$

Riešenie: $[\frac{3}{2}, 0, -\frac{81}{4}]$

Ak $x = -\frac{3}{2} \longrightarrow \lambda = -\frac{81}{4}$ opäť

Riešenie: $[-\frac{3}{2}, 0, -\frac{81}{4}]$

• Ak $x = 0$: $y^2 = 9 \Rightarrow y = \pm 3$

Ak $y = 3 \rightarrow \lambda = -1$ (dosadenie do II. rovnice)

Riešenie: $[0, 3, -1]$

Ak $y = -3 \rightarrow \lambda = -1$ (-||-)

Riešenie: $[0, -3, -1] \longrightarrow$ Tieto body sú viazané extrémy (kandidáti) na väzbe $g(x,y)$.

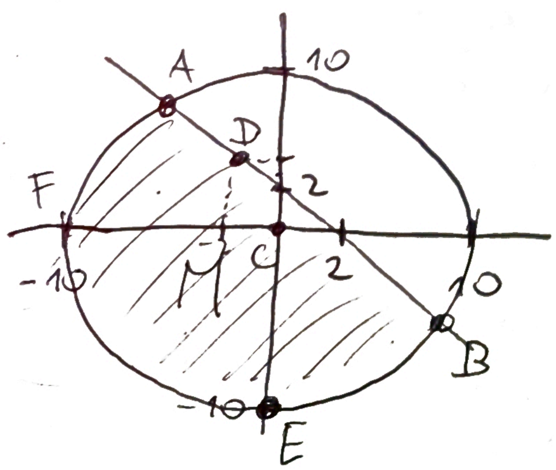
$$F(\pm\tfrac{3}{2}, 0) = 81 \cdot (\pm\tfrac{3}{2})^2 + 0^2 = 81 \cdot \frac{9}{4} = 182{,}25 \longrightarrow MAX$$

$$F(0, \pm 3) = 81 \cdot 0^2 + (\pm 3)^2 = 9 \longrightarrow MIN.$$

<u>Pr. 2</u> $F(x,y) = 2x^2 - y^2$ Skúšková písomka LS 22 (Varianta B)

$$M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 \le 100;\ x + y \le 2\}$$

1) Nakreslime si pekný veľký obrázok.



$x^2 + y^2 \le 100 \rightarrow$ kruh s $r = 10$

$x + y \le 2$

$y \le -x + 2$ priamka ($k = -1 \rightarrow$ klesá)

Priesečníky: $\rightarrow$ nájdeme dva body

Riešenie sústavy

$$x^2 + y^2 = 100$$
$$x + y = 2 \longrightarrow y = 2 - x$$

$$x^2 + (2-x)^2 = 100 \qquad y = 2-x$$

$$x^2 + 4 - 4x + x^2 = 100$$

$$2x^2 - 4x + 4 - 100 = 0$$

$$x^2 - 2x - 48 = 0$$

$$D = 4 + 4 \cdot 48 = 196$$

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm 14}{2} \left\langle \begin{array}{l} 8 \\ -6 \end{array} \right.$$

Priesečníky sú body:

$A = [-6, 8]$

$B = [8, -6]$

• Extrémy na M°:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial F}{\partial x} = 4x = 0 \Rightarrow x = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} = 2y = 0 \Rightarrow y = 0 \end{array}\right\} C = [0,0]$$

• Extrémy na priamke → použime L.M.

$$L_1(x,y,\lambda) = F(x,y) + \lambda g(x,y) = 2x^2 + y^2 + \lambda(x+y-2)$$

$$\frac{\partial L_1}{\partial x} = 4x + \lambda = 0 \rightarrow x = -\frac{\lambda}{4} = x = -2$$

$$\frac{\partial L_1}{\partial y} = -2y + \lambda = 0 \rightarrow y = \frac{\lambda}{2} \qquad y = 4$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = x + y - 2 = 0 \rightarrow -\frac{\lambda}{4} + \frac{\lambda}{2} - 2 = 0 \quad / \cdot (4)$$

$$\lambda - 2\lambda + 8 = 0$$

$$-\lambda = -8$$

$$\lambda = 8$$

Bod $D = [-2, 4]$ je ďalší kandidát na extrém

Na kružnici: $L_2(x,y,\lambda) = 2x^2 - y^2 + \lambda(x^2+y^2-100)$

$$\frac{\partial L_2}{\partial x} = 4x + 2\lambda x = 0 \longrightarrow x(4+2\lambda) = 0$$

$x = 0 \quad \lambda = -2$

$$\frac{\partial L_2}{\partial y} = -2y + 2\lambda y = 0 \longrightarrow y(-2+2\lambda) = 0$$

$y = 0 \quad \lambda = 1$

$$\frac{\partial L_3}{\partial \lambda} = x^2 + y^2 - 100 = 0$$

- Ak $x = 0 \longrightarrow$ a $y^2 - 100 = 0$

  $y = \pm 10$ a $\lambda = 1$

- Ak $y = 0 \longrightarrow x^2 - 100 = 0$ a $\lambda = -2$

  $x = \pm 10$

Riešením sú body $[0,10]$, $\overset{E}{[0,-10]}$, $[10,0]$, $\overset{F}{[-10,0]}$

$\notin M \quad \in M \quad \notin M \quad \notin M$

- Vyberieme extrémy

$f(8,-6) = 92$

$f(-6,8) = 8$

$f(-2,4) = -8$

$f(0,0) = 0$

$f(0,-10) = -100 \rightarrow MIN$

$f(-10,0) = 200 \rightarrow MAX$