1) $$\lim_{x\to 2} \frac{\ln(x^3+x-9)}{x^2-6x+8} \overset{L.H.}{=} \lim_{x\to 2} \frac{\frac{3x^2+1}{x^3+x-9}}{2x-6}$$ (1b) (1b)

po dosadení limita typu $\frac{0}{0}$.

možno dosadiť

$$= \lim_{x\to 2} \frac{3x^2+1}{(x^3+x-9)(2x-6)} = \frac{3\cdot 2^2+1}{(2^3+2-9)(2\cdot 2-6)} = -\frac{13}{2}$$ (1b) (1b)

Bodovanie:
- zistenie, že treba použiť L.H. pravidlo, overenie predpokladov vety – (1b)
- Správne zderivovaný čitateľ – (0,5b)
- Správne zderivovaný menovateľ – (0,5b)
- Správne upravený výraz do podoby rac. lomenej fcie (1
- zistenie, že už možno dosadzať a výsledok – (1b)

2) $$f(x) = \frac{(x+1)^2}{\sqrt{x}}$$

podmienka: $x > 0 \Rightarrow D_f = \mathbb{R}^+ = (0,\infty)$ (0,5b)

ostrá nerovnosť, lebo $\sqrt{\ }$ a zároveň menovateľ

$$f'(x) = \frac{((x+1)^2)'\sqrt{x} - (x+1)^2\cdot(\sqrt{x})'}{(\sqrt{x})^2} = \frac{2(x+1)\sqrt{x} - \frac{(x+1)^2}{2\sqrt{x}}}{x}$$ (0,5b) (0,5b)

$$= \frac{4(x+1)x - (x^2+2x+1)}{2\sqrt{x}\,x} = \frac{4x^2+4x-x^2-2x-1}{2x\sqrt{x}}$$

$$= \frac{3x^2+2x-1}{2x\sqrt{x}} = \frac{(x+1)(3x-1)}{2x\sqrt{x}}$$ (2b)

alternatíve z ranného

podmienka: $x \neq 0 \wedge x \geq 0 \Rightarrow D_{f'} = \mathbb{R}^+ = (0,\infty)$

Bodovanie:
- D_f správne (0,5b)
- zistenie, že treba použiť vetu o derivácii podielu – (0,5b)
- Správne zderivovanie podielu (0,5b)
- Úpravy a správny výsledok (2b)
- $D_{f'}$ správne (0,5b)

3) $f(x) = \dfrac{x+1}{2x-4}$ $\qquad k = -\dfrac{3}{2}$

a) Vyšetrujme dotyčnicu: ~~Bsolvotäky~~

$k = f'(x_0) \Rightarrow f'(x) = \dfrac{1\cdot(2x-4) - (x+1)\cdot 2}{(2x-4)^2}$

alternatívne (1b)

$f'(x) = \dfrac{\cancel{x} - 6}{(2x-4)^2} = -\dfrac{3}{2(x-2)^2}$

$-\dfrac{3}{2} = \dfrac{-6}{(2x_0-4)^2}$ (0,5b)

$4x_0^2 - 16x_0 + 16 = 4$

$x_0^2 - 4x_0 + 3 = 0$

$(x_0-3)(x_0-1) = 0$

(1b) $\left.\begin{array}{l} x_0 = 1 \\ x_0 = 3 \end{array}\right\}$ Body, kde dotyčnica má smernicu $k = -\frac{3}{2}$

Body dotyku dopočítame: $f(1) = -1 \Rightarrow \boxed{T_1 = [1,-1]}$

$f(3) = 2 \Rightarrow \boxed{T_2 = [3,2]}$ (0,5b)

Rovnica dotyčnice: $t: y = kx + q$

$T_1 \in t_1$: $y_0 = -\frac{3}{2}x_0 + q$

$-1 = -\frac{3}{2} + q$

$q = \frac{1}{2}$

t_1: $\boxed{y = -\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}}$ (1b)

$T_2 \in t_2$: $y_0 = -\frac{3}{2}x_0 + q$

$2 = -\frac{3}{2}\cdot 3 + q$

$q = \frac{13}{2}$

t_2: $\boxed{y = -\frac{3}{2}x + \frac{13}{2}}$ (1b)

Priesečníky s osami:

P_{t_1x}: $y = 0 \Rightarrow 0 = -\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$ (0,5b)

$x = \frac{1}{3} \Rightarrow \boxed{P_{t_1x} = [\frac{1}{3}, 0]}$

P_{t_1y}: $x = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{P_{t_1y} = [0, \frac{1}{2}]}$

P_{t_2x}: $y = 0 \Rightarrow 0 = -\frac{3}{2}x + \frac{13}{2}$

$x = \frac{13}{3}$ (0,5b)

$\boxed{P_{t_2x} = [\frac{13}{3}, 0]}$

P_{t_2y}: $x = 0 \Rightarrow \boxed{P_{t_2y} = [0, \frac{13}{2}]}$

5) Hyperbola: $f(x) = \frac{x+1}{2x-4}$ $\quad D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$ 0,5b

↳ $\boxed{x = 2 \text{ je vertikálna asymptota}}$ 0,5b

(môžno overiť výpočtom limít zľava a sprava)

$$(x+1):(2x-4) = \frac{1}{2} + \frac{3}{2(x-2)}$$
$$\frac{-x+2}{3}$$

⟹ $\boxed{S = [2, \frac{1}{2}]}$ prípadne alternatívne vrcholom 1b

⟹ $\boxed{y = 1}$ je horizontálna asymptota (overenie $\lim_{x \to \pm\infty} f(x)$) 0,5b

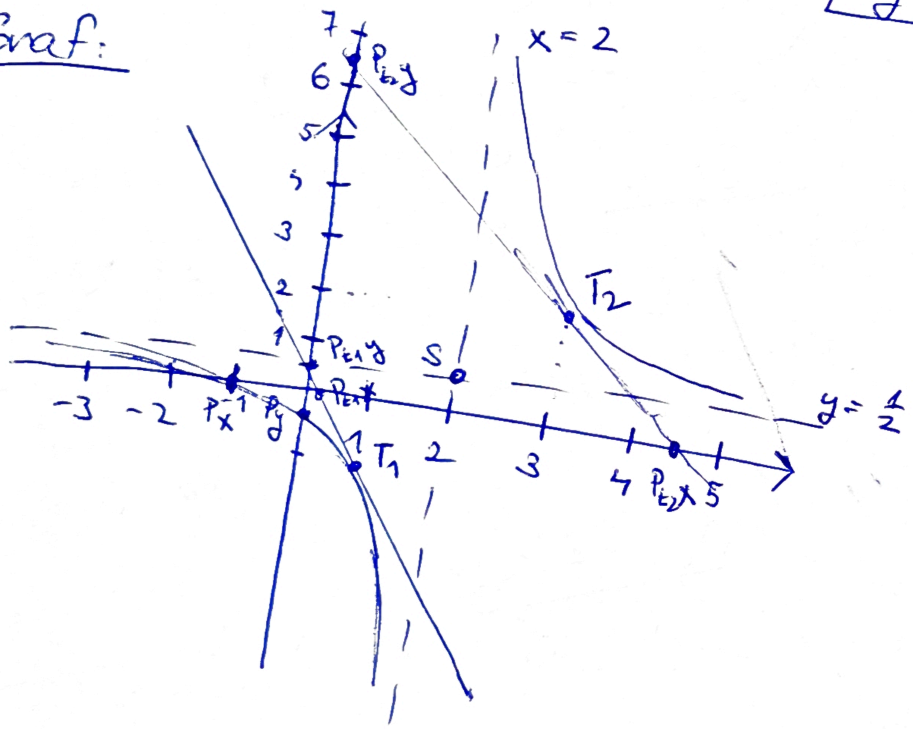
Priesečníky hyperboly

P_x: $y = 0$ $\Rightarrow$ $0 = \frac{x+1}{2x-4}$ $\Rightarrow$

P_y: $x = 0$ $\Rightarrow$ $y = -\frac{1}{4}$ $\Rightarrow$

$\boxed{P_x = [-1, 0] \quad P_y = [0, -\frac{1}{4}]}$ 1b

Graf:



2,75b

Bodovanie:
- Správne zderivovaná fcia 1b
- Dosadenie smernice do derivácie 0,5b
- Nájdenie bodov x_0 1b
- Nájdenie y_0 pre body dotyku 0,5b
- Dotyčnice 1b každá
- Priesečníky dotyčnic 0,25b za každý

} 6b

- D_f 0,5b
- Asymptoty 0,5b každá
- Stred 1b
- P_x, P_y hyperboly 0,5b každý
- Obrázok 2,5b

} 6b

4) $f(x) = \dfrac{x^2+4x-12}{x-3}$

$$* \quad \lim_{x\to 3^+} \frac{x^2+4x-12}{x-3} = \frac{9}{0^+} = +\infty \quad (0{,}5b)$$

$$\lim_{x\to 3^-} \frac{x^2+4x-12}{x-3} = \frac{9}{0^-} = -\infty \quad (0{,}5b)$$

asymptota $x = 3$

1) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{3\}$ (1b)

2) D_f nie je symetrický $\Rightarrow$ nie je párna ani nepárna. Navyše:

$$f(-x) = \frac{(-x)^2+4\cdot(-x)-12}{-x-3} = \frac{x^2-4x-12}{-x-3} \neq f(x) \neq -f(x)$$

$\Rightarrow$ nie je ani sudá ani lichá (1b)

3) P_x: $y = 0 \Rightarrow 0 = \dfrac{x^2+4x-12}{x-3}$

$$x^2+4x-12 = 0$$
$$(x+6)(x-2) = 0$$
$$x = -6$$
$$x = 2 \quad \Rightarrow \quad P_{x_1} = [2,0] \ (0{,}5b)$$
$$P_{x_2} = [-6,0] \ (0{,}5b)$$

P_y: $x = 0 \Rightarrow y = \dfrac{0+0-12}{0-3} = 4 \Rightarrow P_y = [0,4]$ (0,5b)

4) $\ominus$ $\oplus$ $\ominus$; -6, 2

Fcia je kladná na $(-6,2)$ (1b)

Fcia je záporná na $(-\infty,-6) \cup (2,\infty)$

5) $$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+4x-12}{x-3} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2\left(1+\frac{4}{x}-\frac{12}{x^2}\right)}{x\left(1-\frac{3}{x}\right)} = \lim_{x\to-\infty} x \cdot \lim_{x\to-\infty} \frac{1+\frac{4}{x}-\frac{12}{x^2}}{1-\frac{3}{x}} = -\infty \ (0{,}5b)$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+4x-12}{x-3} = \ldots \text{ analogicky } = +\infty \quad * \ (0{,}5b)$$

6) $$f'(x) = \frac{(2x+4)(x-3)-(x^2+4x-12)}{(x-3)^2} = \frac{2x^2-6x+\cancel{4x}-\cancel{12}-x^2-\cancel{4x}+\cancel{12}}{(x-3)^2}$$

$$= \frac{x^2-6x}{(x-3)^2} = \frac{x(x-6)}{(x-3)^2} \quad (1b)$$

$D_{f'} = \mathbb{R} \setminus \{3\}$

Stac. body: $x(x-6) = 0$

$$x = 0$$
$$x = 6 \quad (0{,}5b)$$

7) Monotónnosť

$\oplus \quad \ominus \quad \oplus$

$0 \qquad 6$

Fcia je rastúca na $(-\infty,0)\cup(6,\infty)$
Fcia je klesajúca na $(0,6)$
v bode $x=0$ je lokálne max
v bode $x=6$ je lokálne min
(Globálne extrémy neexistujú)

~~1,5b~~ 2b

8) Asymptoty: Vertikálna asymptota ~~[illegible]~~ $x=3$ 0,5b
Šikmé ani horizontálne neexistujú (z výpočtu limít, ktoré divergujú) 0,5b

9) $$F''(x) = \frac{(2x-6)(x-3)^2-(x^2-6x)2(x-3)}{(x-3)^4}$$

$$= \frac{(2x-6)(x^2-6x+9)-(2x^3-6x^2-12x^2+36x)}{(x-3)^4}$$

$$= \frac{\cancel{2x^3}-\cancel{12x^2}+18x-\cancel{6x^2}+\cancel{36x}-54-\cancel{2x^3}+\cancel{6x^2}+\cancel{12x^2}-\cancel{36x}}{(x-3)^4}$$

$$= \frac{18x-54}{(x-3)^4} = \frac{18\cancel{(x-3)}}{(x-3)^{\cancel{4}\,3}} = \frac{18}{(x-3)^3} \qquad D_{f''} = \mathbb{R}\setminus\{3\}$$

2b

$F''(x)\neq 0$ pre žiadne $x\in D_f \Rightarrow$ ~~[illegible]~~ jediný kandidát na inflexný bod je $x=3$ (miesto, kde $f''(x)$ neexistuje)

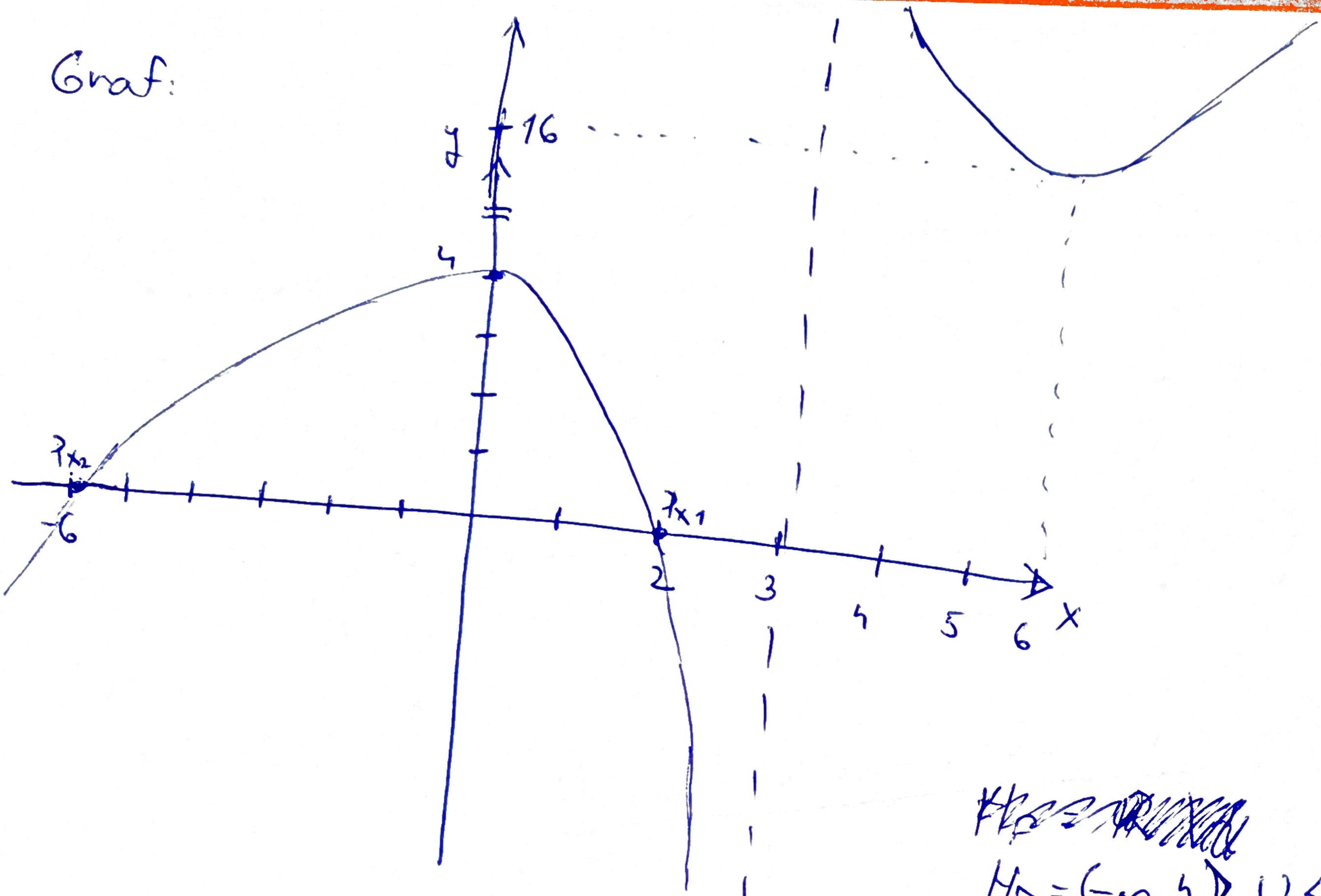
$\ominus \quad \oplus$

3

Fcia je konvexná na ~~[illegible]~~ $(3,\infty)$
Fcia je konkávna na $(-\infty,3)$
v bode $x=3$ je inflexný bod, ale fcia je tam nedefinovaná (preto uznávam aj keď napíšu len intervaly konvexnosti/konkávnosti)

1,5b

Graf:



$f(6) = 16$

~~Hf = ...~~

$H_f = (-\infty, 4\rangle \cup \langle 16, \infty)$ 1b

Bodovanie:

- D_f – 1b
- Súdosť / lichosť – 1b
- P_{x_1}, P_{x_2}, P_y – 0,5b každý
- ⊕/⊖ – 1b
- limity – 0,5b každá
- $D_{f'}$ + stac. body – 2b
- Monotónia – 1b + lok. extrémy 1b
- Asymptota 0,5b + zistenie, že ďalšia nie je 0,5b
- $D_{f''}$ – 2b
- Intervaly konvexnosti, konkávnosti 1,5b
- H_f – 1b (prípadne len určenie hodnoty $f(6)$ – 0,5b len)
- Graf – 4b

5) $f(x,y) = xy - y + x^3 - 3x^2 + 3x$

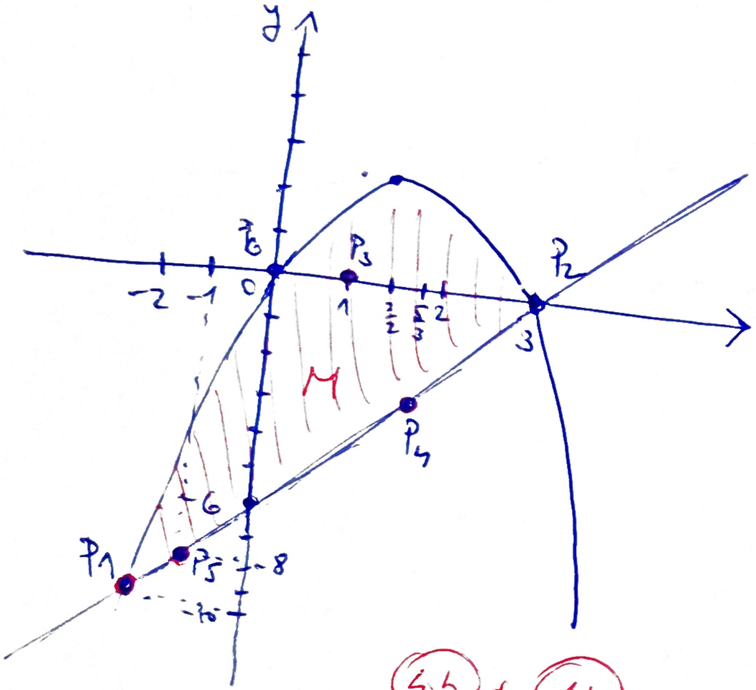
$M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : 2x - 6 \leq y \leq 3x - x^2\}$

Náčrt množiny M. $\quad M = M^0 \cup \partial M$

$y \geq 2x - 6 \Rightarrow$ priamka $P_y = [0, -6]$ a $P_x = [3, 0]$

$y \leq -x^2 + 3x \Rightarrow$ parabola $y = -x^2 + 3x = \cancel{\quad} = -(x - \frac{3}{2})^2 + \frac{9}{4}$

$V = [+\frac{3}{2}, \frac{9}{4}]$ a konkávna



Priesečníky oboch fcií:

$2x - 6 = -x^2 + 3x$

$x^2 - x - 6 = 0$

$(x-3)(x+2) = 0$

$x = 3$

$x = -2$

$f(-2) = -10$

$f(3) = 0$

$\boxed{\begin{matrix} P_1 = [-2, 10] \\ P_2 = [3, 0] \end{matrix}}$

4b + 1b

a) Na M^0:

$\frac{\partial f}{\partial x} = y + 3x^2 - 6x + 3 = 0$

$\frac{\partial f}{\partial y} = x - 1 = 0$

$x = 1$

3b

$y + \cancel{3} - \cancel{6} + \cancel{3} = 0 \Rightarrow$ Bod $\boxed{P_3 = [1, 0]}$ je kandidát na extrém

$y = 0$

b) Na ∂M:

Na priamke $y = 2x - 6$

$f(x, 2x-6) = x(2x-6) - (2x-6) + x^3 - 3x^2 + 3x$

$= 2x^2 - 6x - 2x + 6 + x^3 - 3x^2 + 3x$

$= x^3 - x^2 - 5x + 6 = g(x)$

$$g'(x) = 3x^2 - 2x - 5 = 0$$

$$D = 4 + 4 \cdot 3 \cdot 5 = 64$$

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm 8}{6} = \begin{cases} \frac{5}{3} & \Rightarrow y = 2 \cdot \frac{5}{3} - 6 = \frac{10}{3} - 6 = -\frac{8}{3} \\ -1 & \Rightarrow y = 2 \cdot (-1) - 6 = -8 \end{cases}$$

5b

$$\boxed{P_4 = \left[\frac{5}{3}, -\frac{8}{3}\right]} \quad \boxed{P_5 = [-1, -8]}$$

Na parabole:

$$f(x, -x^2 + 3x) = x(-x^2 + 3x) - (-x^2 + 3x) + x^3 - 3x^2 + 3x$$

$$= \cancel{-x^3} + \cancel{3x^2} + x^2 \cancel{- 3x} \cancel{+ x^3} \cancel{- 3x^2} \cancel{+ 3x}$$

$$= x^2 = h(x)$$

$$h'(x) = 2x = 0$$

$$x = 0 \Rightarrow y = 0$$

4b

$\boxed{P_6 = [0,0]}$ je kandidát na extrém

Možno tiež použiť Lagrangeove mult. v oboch.

Druhá strana

Vyhodnotenie kandidátov:

$f(-2,10) = 4$

$f(3,0) = 9 \Rightarrow$ MAX.

$f(1,0) = 1$

$f\left(\frac{5}{3}, -\frac{8}{3}\right) = -\frac{13}{27} \Rightarrow$ MINIMUM

$f(-1,-8) = 9 \Rightarrow$ MAX.

$f(0,0) = 0$

3b

Bodovanie

- Náčrt množiny 4b + správne vyznačené body 1b
- M^0 a nájdenie bodu $[1,0]$ – 3b
- Na priamke 5b
- Na parabole 4b
- Dosadenie a vyhodnotenie 3b

Ešte výpočet cez L.M.: (lebo majú určiť hodnotu λ)

$$L(x,y,\lambda) = xy - y + x^3 - 3x^2 + 3x - \lambda(3x - x^2 - y)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = y + 3x^2 - 6x + 3 - 3\lambda + 2\lambda x = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = x - 1 + \lambda = 0 \Rightarrow x = 1 - \lambda$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 3x - x^2 - y = 0$$

Riešenie $\boxed{x = 0 \quad y = 0 \quad \lambda = 1}$

$$3(1-\lambda) - (1-\lambda)^2 - y = 0$$

$$3 - 3\lambda - 1 + 2\lambda - \lambda^2 - y = 0$$

$$y = -\lambda^2 - \lambda + 2$$

dosadením do 1 za x, y