**Kvadratická rovnice** $ax^2 + bx + c = 0$

- diskriminant $D = b^2 - 4ac$
- kořeny $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$

**Počet reálných řešení**
$D < 0$ žádné
$D = 0$ jedno (dvojnásobné)
$D > 0$ dvě

**Hádání kořenů**
$x^2 + bx + c = 0$

- $x_1 \cdot x_2 = c$
- $x_1 + x_2 = -b$

**Operace s exponenty**

- $a^b \cdot a^c = a^{(b+c)}$
- $(a^b)^c = a^{b \cdot c}$
- $b = \sqrt[n]{a} \Leftrightarrow a = b^n$
- $a^{1/n} = \sqrt[n]{a}$
- $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$
- $a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$
- $a^0 = 1$

**Součinové a podílové nerovnice**

Řešte $\frac{(2x-4)(-x-3)}{(-3)(x-1)} \geq 0$

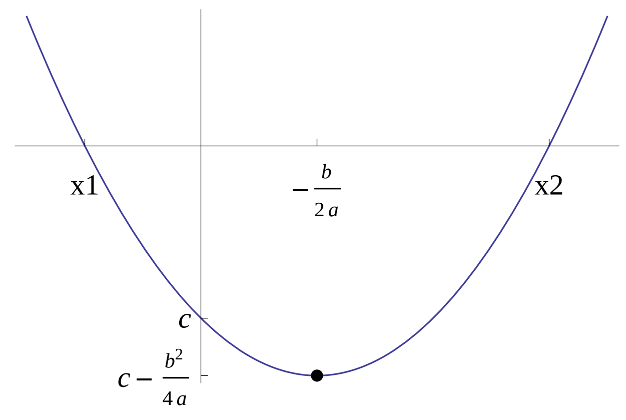
- najdu nulové body: $2, -3, 1$
- tabulkou

| | $(-\infty, -3\rangle$ | $\langle -3, 1)$ | $(1, 2\rangle$ | $\langle 2, \infty)$ |
|---|---|---|---|---|
| $(2x-4)$ | $-$ | $-$ | $-$ | $+$ |
| $(-x-3)$ | $+$ | $-$ | $-$ | $-$ |
| $(-3)$ | $-$ | $-$ | $-$ | $-$ |
| $(x-1)$ | $-$ | $-$ | $+$ | $+$ |
| celkem | $-$ | $+$ | $-$ | $+$ |

- $x \in \langle -3, 1) \cup \langle 2, \infty)$

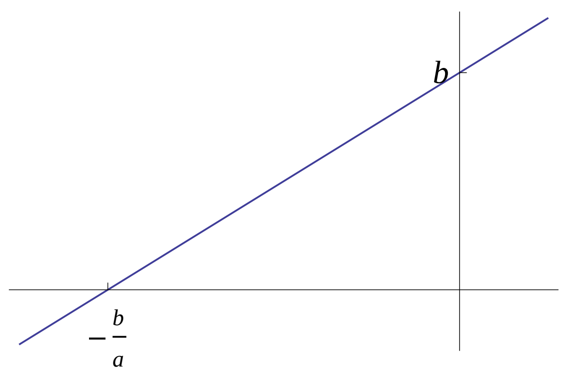
**Parabola** $f: y = ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$

- průsečíky s osou $x$: kořeny $x_1, x_2$
- průsečíky s osou $y$: $c$
- vrchol paraboly: $[\frac{-b}{2a}, f(\frac{-b}{2a}) = c - \frac{b^2}{4a}]$




**Lineární funkce** $f: y = ax + b$

- průsečíky s osou $x$: $\frac{-b}{a}$
- průsečíky s osou $y$: $b$
- přímka body $[a, b], [c, d]$ má rovnici $y = \frac{(b-d)}{(a-c)}x + \frac{(ad-bc)}{(a-c)}$

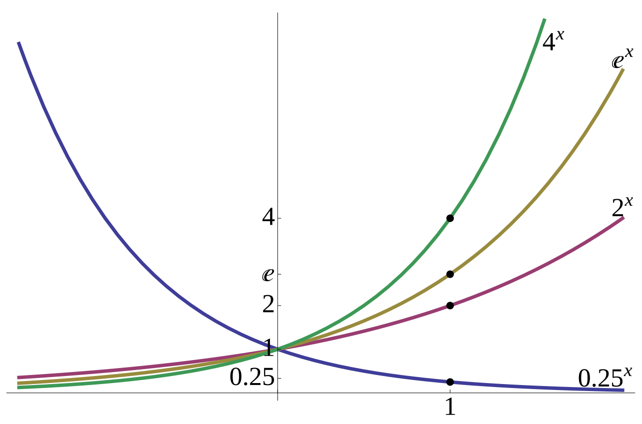



**Exponenciála** $y = e^x$, $y = a^x$

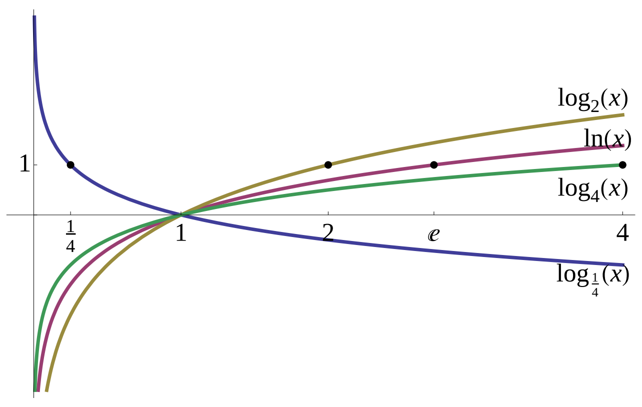
$e \doteq 2,7182 \qquad e^{x+y} = e^x \cdot e^y$

$a^{x+y} = a^x \cdot a^y \qquad a^x = e^{x \ln a}$

| $x$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| $e^x$ | 1 | $e$ | $e^2$ |




**Logaritmus** $y = \log_a x$, $y = \ln x$




$\boxed{\log_a x = b \leftrightarrow a^b = x}$

$\ln(xy) = \ln x + \ln y$

$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$

$\log_a x = \dfrac{\ln x}{\ln a}$

| $x$ | 0 | 1 | $e$ | $e^2$ |
|---|---|---|---|---|
| $\ln x$ | $\nexists$ | 0 | 1 | 2 |

| $x$ | 0 | 1 | $a$ | $a^2$ |
|---|---|---|---|---|
| $\log_a x$ | $\nexists$ | 0 | 1 | 2 |

Najděte všechna reálná řešení rovnice $\frac{625^{-2x+1}}{5} = 125^3$

- upravíme vše na mocniny pětky $625 = 5^4$, $125 = 5^3$
- dostáváme $5^{4(-2x+1)-1} = 5^9$
- porovnáme exponenty $4(-2x+1) - 1 = 9$
- dořešíme $-8x + 4 - 1 = 9 \Rightarrow -8x = 6 \Rightarrow x = -3/4$

Najděte všechna reálná řešení rovnice $\log_{\frac{1}{2}}(2 - x) = -2$

- logaritmus má smysl pro $(2 - x) < 0$, tedy $D_f = (-\infty, 2)$
- PS převedeme na logaritmus $-2 = \log_{\frac{1}{2}} 4$
- porovnáme argumenty $\log_{\frac{1}{2}}(2 - x) = \log_{\frac{1}{2}} 4$
- dořešíme $2 - x = 4 \Rightarrow -x = 2 \Rightarrow x = -2$

**Limita posloupnosti** $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$

Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ má v $\infty$ limitu $a$, pokud se členy posloupnosti blíží libovolně blízko k $a$, pro $n$ jde k $\infty$.

**Limity posloupností - typové příklady**

1. vytknout nejvyšší mocninu ($n^3$ v čitateli, $n^2$ ve jmenovateli)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^3 - 2n + 1}{4n^2 - 3n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3\left(1 - \frac{2}{n^2} + \frac{1}{n^3}\right)}{n^2\left(4 + \frac{3}{n}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n\left(1 - \frac{2}{n^2} + \frac{1}{n^3}\right)}{4 + \frac{3}{n}} = \frac{\infty \cdot (1 - 0 + 0)}{4 + 0} = \infty$$

2. rozšířit výrazem typu $\sqrt{n+1} + \sqrt{n}$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \lim_{n\to\infty} \sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \cdot \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}(n + 1 - n)}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}\left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1\right)} = \frac{1}{(1 + 0) + 1} = \frac{1}{2}$$

3. vytknout nejvyšší základ, tj. největší $a$, které se vyskytuje ve výrazech typu $a^n$, tady $4^{n-1}$, $4^n$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{5 \cdot 4^{n-1} + 3 \cdot 2^{n+1}}{4^n - 2^{n+6}} = \lim_{n\to\infty} \frac{4^{n-1}(5 + 3 \cdot 2^2 \cdot \left(\frac{2}{4}\right)^{n-1})}{4^n\left(1 - 2^6 \cdot \left(\frac{2}{4}\right)^n\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{5 + 3 \cdot 2^2 \cdot \left(\frac{2}{4}\right)^{n-1}}{4\left(1 - 2^6 \cdot \left(\frac{2}{4}\right)^n\right)} = \frac{5 + 12 \cdot 0}{4 \cdot (1 - 64 \cdot 0)} = \frac{5}{4}$$

Na začátku upravit $a^{bn+c} = a^c \cdot (a^b)$. Např. $2^{2n+3} = 2^3 \cdot 2^{2n} = 8 \cdot (2^2)^n = 8 \cdot 4^n$. Nebo $9^{n/2} = (9^{1/2})^n = 3^n$.

| | |
|---|---|
| $\lim\limits_{n\to\infty} kn = \infty$ | $k > 0$ |
| $= -\infty$ | $k < 0$ |
| $= 0$ | $k = 0$ |

| | |
|---|---|
| $\lim\limits_{n\to\infty} q^n =$ neexistuje | $q \in (-\infty, -1\rangle$ |
| $= 0$ | $q \in (-1, 1)$ |
| $= 1$ | $q = 1$ |
| $= \infty$ | $q \in (1, \infty)$ |

**Není definováno**

$\dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}$

$\pm\infty \cdot 0$

$\dfrac{\text{cokoli}}{0}$

$\infty - \infty$

**Dělení nulou**

$\boxed{\begin{array}{l} \frac{1}{0^+} = \infty \\ \frac{1}{0^-} = -\infty \end{array}}$

**Přehled funkcí**

| $f(x)$ | definiční obor |
|---|---|
| $c$ | $x \in \mathbb{R}$ |
| $x^n$ | $x \in \mathbb{R}$ |
| $\lvert x \rvert$ | $x \in \mathbb{R}$ |
| $\frac{p(x)}{q(x)}$ | $x \in \mathbb{R} \setminus \{q(x) = 0\}$ |
| $\sqrt[k]{x}$, $k$ sudé | $x \in \langle 0, \infty)$ |
| $\sqrt[k]{x}$, $k$ liché | $x \in \mathbb{R}$ |
| $e^x$ | $x \in \mathbb{R}$ |
| $a^x$, $a \neq 1$ | $x \in \mathbb{R}$ |
| $\ln x$ | $x \in (0, \infty)$ |
| $\log_a x$ | $x \in (0, \infty)$ |

**Příklad** Určete definiční obor

- $\sqrt{\frac{x+3}{x-2}} \Rightarrow$ řeším nerovnici $\frac{x+3}{x-2} \geq 0$, navíc $x \neq 2$
- $\log_{10}\left(\frac{x+3}{x-2}\right) \Rightarrow$ řeším nerovnici $\frac{x+3}{x-2} > 0$, navíc $x \neq 2$

| $f(x)$ | $e^x$ | $(\frac{1}{2})^x$ | $\ln x$ | $\log_{\frac{1}{2}} x$ |
|---|---|---|---|---|
| $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ | 0 | $\infty$ | $\nexists$ | $\nexists$ |
| $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ | 1 | 1 | $-\infty$ | $\infty$ |
| $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ | $\infty$ | 0 | $\infty$ | $-\infty$ |

**Limita funkce** $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$

Funkce $f(x)$ má v bodě $x_0$ limitu $a$, pokud se $y = f(x)$ blíží libovolně blízko k $a$, pro $x$ blížící se k $x_0$.

- $x_0 \in D_f$ pak $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$
- pro krajní body definičního oboru počítáme jednostranné limity

**Srovnání logaritmu, polynomu a exponenciály**

exponenciála ($e^x$, $2^x$, atd.) $\gg$ polynom ($x$, $x^2$, atd.) $\gg$ logaritmus ($\ln x$, $\log_2 x$, atd.)

limita součinu (podílu) má hodnotu podle silnějšího

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^{x+3}} = 0, \quad \lim_{x\to\infty} \frac{\ln^2(2x-3)}{\sqrt{x}} = 0, \quad \lim_{x\to-\infty} x^2 e^{x+3} = 0, \quad \lim_{x\to 2^+} (x-2)\ln(3x-6) = 0$$

**Derivace**

| $f(x)$ | $f'(x)$ | definiční obor | příklad |
|---|---|---|---|
| $c$ | 0 | $x \in \mathbb{R}$ | $(3)' = 0$ |
| $x^n$ | $nx^{n-1}$ | $n \in \mathbb{N} \Rightarrow x \in \mathbb{R}$ | $(x^3)' = 3x^2$ |
| $x^n$ | $nx^{n-1}$ | $n \in \mathbb{R} \Rightarrow x \in \mathbb{R}^+$ | $(x^{2/3})' = \frac{2}{3}x^{-1/3}$ |
| $\sqrt[n]{x}$ | $\frac{1}{n}\sqrt[n]{x^{1-n}}$ | $x \in \mathbb{R}^+$ | $(\sqrt[4]{x})' = \frac{1}{4}\sqrt[4]{x^{-3}}$ |
| $e^x$ | $e^x$ | $x \in \mathbb{R}$ | $(e^x)' = e^x$ |
| $a^x$ | $a^x \ln a$ | $a > 0 \Rightarrow x \in \mathbb{R}$ | $(2^x)' = 2^x \ln 2$ |
| $\ln x$ | $\frac{1}{x}$ | $x \in \mathbb{R}^+$ | $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ |
| $\log_a x$ | $\frac{1}{x \ln a}$ | $a > 0\ \&\ a \neq 1 \Rightarrow x \in \mathbb{R}^+$ | $(\log_{10} x)' = \frac{1}{x \ln 10}$ |

$$(cf)' = cf'$$
$$(3x^2)' = 6x$$

$$(f \pm g)' = f' \pm g'$$
$$(x^2 + \ln x)' = 2x + \frac{1}{x}$$

$$(f \cdot g)' = f'g + fg'$$
$$(x \cdot e^x)' = 1 \cdot e^x + xe^x$$

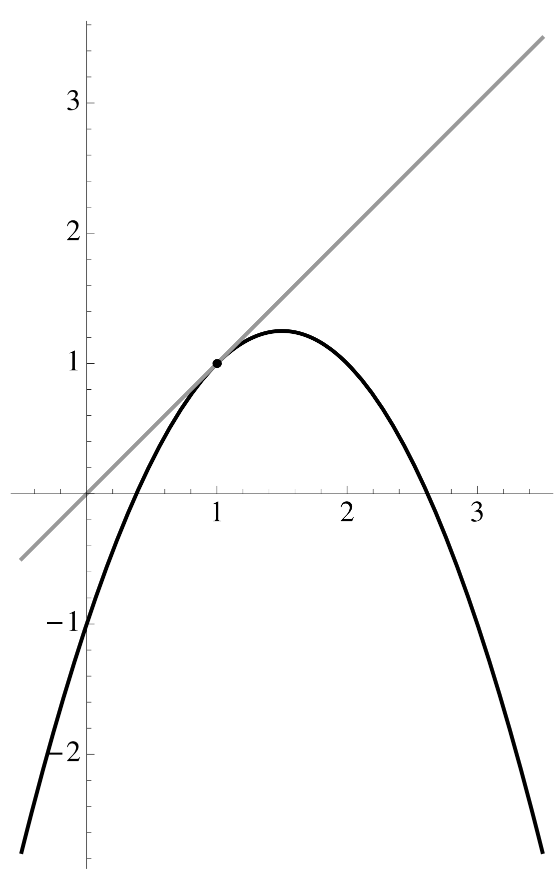
$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$
$$\left(\frac{x^2 + 1}{3x}\right)' = \frac{2x \cdot 3x - (x^2 + 1) \cdot 3}{(3x)^2}$$

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$
$$(e^{x^2+3})' = e^{x^2+3} \cdot 2x$$

**L'Hospitalovo pravidlo** [Lopitalovo]

Pro limity typu $\frac{0}{0}$ a $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ platí $\qquad \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

(pokud je pravá strana definovaná)




**Tečna k** $f(x)$ **v bodě** $x_0$

- má rovnici $y = ax + b$ pro $a = f'(x_0)$ a $b = f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0$
- Pokud $f'(x_0)$ není definovaná, nahradíme to $\lim\limits_{x\to x_0} f'(x)$.
- Může vyjít i $\pm\infty$ – svislá tečna

**Příklad** Tečna k $f(x) = -x^2 + 3x - 1$ v bodě $x_0 = 1$.

- $f'(x) = -2x + 3$
- $a = f'(x_0) = f'(2) = -2 \cdot 1 + 3 = 1$
- $b = f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0 = f(1) - f'(1) \cdot 1 = (-1 + 3 - 1) - (-2 + 3) \cdot 1 = 0$
- tečna má rovnici $y = 1x + 0 = x$

**Průběh funkce**

1. definiční obor
2. sudost, lichost

   **sudá funkce** $f(-x) = f(x)$,
   graf souměrný podle osy $y$

   **lichá funkce** $f(-x) = -f(x)$,
   graf souměrný podle bodu 0
3. průsečíky s osami

   **s osou x** dosadit $y = 0$

   **s osou y** dosadit $x = 0$
4. limity v krajních bodech definičního oboru
5. kde je funkce kladná a záporná
6. derivace $f'(x)$
7. výjimečné (podezřelé) body
   - stacionární body $f'(x) = 0$
   - body, kde $f'(x)$ neexistuje
   - krajní body $D_f$
8. intervaly monotonie

   **buď** porovnáním hodnot v podezřelých bodech

   **nebo** pomocí znaménka $f'(x)$

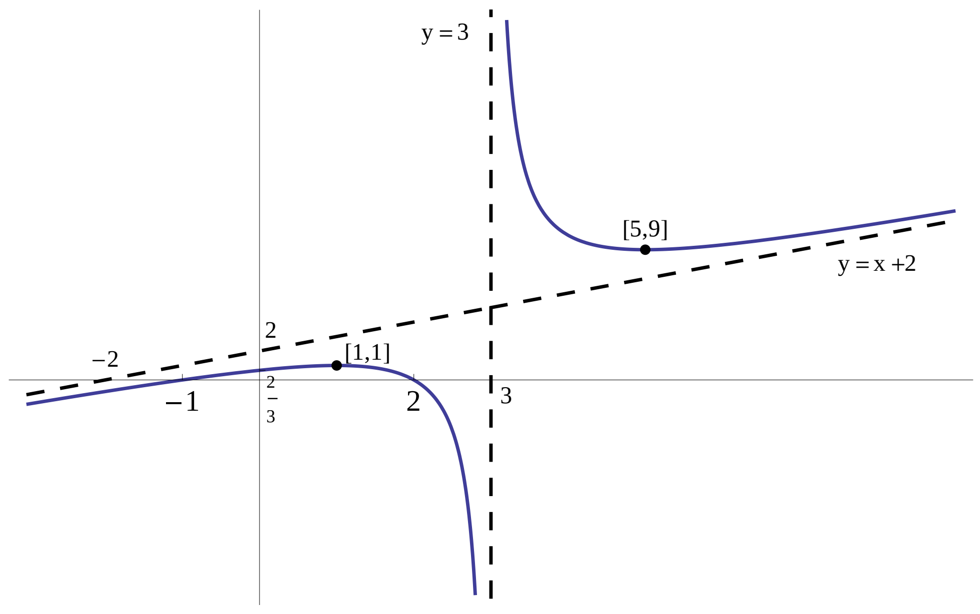
| | |
|---|---|
| $f'(x) > 0$ | $f(x)$ rostoucí |
| $f'(x) \geq 0$ | $f(x)$ neklesající |
| $f'(x) < 0$ | $f(x)$ klesající |
| $f'(x) \leq 0$ | $f(x)$ nerostoucí |

9. extrémy - lokální i globální
10. asymptoty
    - $y = ax + b : a = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$
      $b = \lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) - ax$
    - $x = a : \lim\limits_{x \to a\pm} f(x) = \pm\infty$
11. konvexita, konkavita

| | |
|---|---|
| $f''(x) > 0$ | $f(x)$ konVexní |
| $f''(x) < 0$ | $f(x)$ konkÁvní |

**inflexní bod** $x$: mění se konvexita na konkavitu, $\Rightarrow f''(x) = 0$

12. graf




**Průběh funkce** $f(x) = \frac{x^2-x-2}{x-3}$

1. definiční obor : $D_f = \mathbb{R} \setminus \{3\}$
2. sudost, lichost $f(-x) = \frac{(-x)^2+x-2}{-x-3}$

   $f(-x) \neq f(x)$, $f(-x) \neq -f(x)$, ani sudá ani lichá
3. průsečíky s osami

   **s osou x:** $x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow x_1 = 2, x_2 = -1$

   **s osou y:** $x = 0 \Rightarrow y = \frac{2}{3}$
4. limity v krajních bodech definičního oboru
   - krajní body $D_f$: $-\infty, 3^-, 3^+, \infty$

   $$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to 3^+} f(x) = \frac{4}{0^+} = \infty$$

   $$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \frac{4}{0^-} = -\infty \qquad \lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$$
5. derivace

   $f'(x) = \frac{(2x-1)(x-3)-(x^2-x-2)\cdot 1}{(x-3)^2} = \frac{(x-5)(x-1)}{(x-3)^2}$
6. výjimečné (podezřelé) body
   - stacionární body $(x-5)(x-1) = 0$
     $\Rightarrow x_1 = 5,\ x_2 = 1$
   - body, kde $f'(x)$ neexistuje - nemá
7. intervaly monotonie - první způsob

| $x$ | $-\infty$ | 1 | $3^-$ | $3^+$ | 5 | $\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ nebo $\lim f(x)$ | $-\infty$ | 1 | $-\infty$ | $\infty$ | 9 | $\infty$ |
| monotonie | $\nearrow$ | | $\searrow$ | $\searrow$ | | $\nearrow$ |

7. intervaly monotonie - druhý způsob

   $f'(x) > 0 \Rightarrow x \in (-\infty, 1), x \in (5, \infty)$

   $f'(x) < 0 \Rightarrow x \in (1, 3), x \in (3, 5)$

   Závěr: $f(x)$ roste na intervalech $(-\infty, 1)$ a $(5, \infty)$, $f(x)$ klesá na intervalech $(1, 3)$ a $(3, 5)$
8. extrémy - lokální i globální

   $f(x)$ má lokální maximum v bodě 1,

   $$f(1) = \frac{1-1-2}{1-3} = 1$$

   $f(x)$ má lokální minimum v bodě 5,

   $$f(5) = \frac{25-5-2}{5-3} = 9$$

   globální extrémy nemá
9. asymptoty
   - $a = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2-x-2}{x^2-3x} = 1 \quad b = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x-2}{x-3} = 2$: $f(x)$ má v $+\infty$ asymptotu $y = x + 2$
   - $a = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^2-x-2}{x^2-3x} = 1 \quad b = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{2x-2}{x-3} = 2$: $f(x)$ má v $-\infty$ asymptotu $y = x + 2$
   - $x = a : \lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = \infty, \quad \lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = -\infty$: $f(x)$ má asymptotu $x = 3$
10. konvexita, konkavita

    $f''(x) = \frac{(2x-6)(x-3)^2-(x^2-6x+5)\cdot 2(x-3)}{(x-3)^4} = \frac{8}{(x-3)^3}$

    $f''(x) > 0 \Rightarrow x \in (3, \infty) \Rightarrow f(x)$ je konvexní v intervalu $(3, \infty)$

    $f''(x) < 0 \Rightarrow x \in (-\infty, 3) \Rightarrow f(x)$ je konkávní v intervalu $(-\infty, 3)$

**Vázané extrémy funkcí více proměnných na kompaktní množině (uzavřená, omezená)**

- Nejdříve určíme volné extrémy a zkontrolujeme, jestli leží uvnitř oblasti.
  stacionární bod - všechny parciální derivace nulové $\partial_x f = 0, \partial_y f = 0$, případně $\partial_z f = 0$

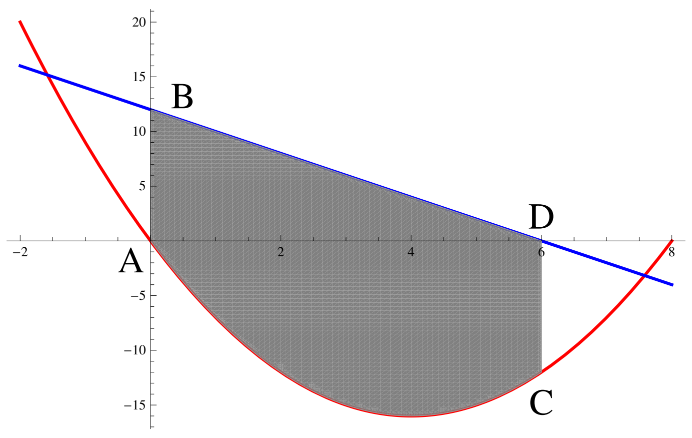
  **Příklad** Najděte stacionární body funkce $f(x, y) = x^3 + 4xy - 2y^2 + 2x - y$ a vypočtěte hodnoty v nich.
  - Vyřešíme soustavu

    $$\partial_x f = 3x^2 + 4y + 2 = 0 \qquad \partial_y f = 4x - 4y - 1 = 0$$

    Z druhé rovnice vyjádříme $y = \frac{4x-1}{4}$ a to dosadíme do první $3x^2 + (4x - 1) + 2 = 0$.
    Dostáváme buď $x_1 = -1$ a nebo $x_2 = -\frac{1}{3}$.
  - Pro $x_1 = -1$ máme $y_1 = \frac{4\cdot(-1)-1}{4} = -\frac{5}{4}$. Pro $x_2 = -\frac{1}{3}$ máme $y_2 = \frac{4\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)-1}{4} = -\frac{7}{12}$.
  - $f(-1, -\frac{5}{4}) = \frac{1}{8}, \quad f(-\frac{1}{3}, -\frac{7}{12}) = -\frac{5}{216}$
- Pak určíme vázané extrémy (na hranici) a to jednou z metod:
  - Dosazovací metoda
    1. vyjádříme hranici $y = h(x)$ nebo $x = h(y)$
       přímka body $[a, b], [c, d]$ má rovnici $y = \frac{(b-d)}{(a-c)}x + \frac{(ad-bc)}{(a-c)}$
    2. dosadíme do $f(x, y)$, získáme $g(x)$ resp. $g(y)$
    3. vypočteme $g'$ a položíme jí rovnou nule
    4. kandidáti na extrém - dopočítáme druhou souřadnici
  - Metoda Jakobiánu
    1. funkce $f(x, y)$, vazba $g(x, y) = 0$,
       resp. $f(x, y, z)$, vazba $g_1(x, y, z) = 0, g_2(x, y, z) = 0$
    2. Jakobián $|J(x, y)| = \partial_x f \cdot \partial_y g - \partial_y f \cdot \partial_x g$, resp.
       $|J(x, y, z)| = \partial_x f \cdot \partial_y g_1 \cdot \partial_z g_2 + \partial_x g_1 \cdot \partial_y g_2 \cdot \partial_z f + \partial_x g_2 \cdot \partial_y f \cdot \partial_z g_1 - \partial_z f \cdot \partial_y g_1 \cdot \partial_x g_2 -$
       $- \partial_z g_1 \cdot \partial_y g_2 \cdot \partial_x f - \partial_z g_2 \cdot \partial_y f \cdot \partial_x g_1$
    3. kandidáti na extrém – řešení soustavy rovnic: $\begin{array}{l} |J(x,y)| = 0, \\ g(x,y) = 0 \end{array}$ resp. $\begin{array}{l} |J(x,y,z)| = 0 \\ g_1(x,y,z) = 0 \\ g_2(x,y,z) = 0 \end{array}$
  - Metoda Lagrangeových multiplikátorů
    1. funkce $f(x_1, \ldots, x_i)$, vazby $g_1(x_1, \ldots, x_i) = 0, \ldots, g_k(x_1, \ldots, x_i) = 0$,
       $i$ je počet proměnných, $k$ je počet vazeb
    2. $L(x, y) = f + \lambda_1\, g_1 + \cdots + \lambda_k\, g_k$
    3. kandidáti na extrém = řešení soustavy $(i + k)$ rovnic : $\begin{array}{ll} \partial_{x_1} L = 0, & g_1 = 0, \\ \vdots & \vdots \\ \partial_{x_i} L = 0, & g_k = 0. \end{array}$
- Dopočítáme hodnotu $f(x, y)$ v kandidátech na extrém.
- Vypočítáme hodnoty v průsečících různých hranic (např. dvou přímek, přímky a křivky atd.).
- Porovnáme hodnoty ve volných extrémech, v extrémech na hranicích a v průsečících hranic, vybereme maximum a minimum.

| prom. | 1 vazba | 2 vazby | více |
|---|---|---|---|
| 2 | dosazovací ($y = h(x)$) Jakobián Lagrange | Lagrange | Lagrange |
| 3 | Lagrange | Jakobián Lagrange | Lagrange |

**Příklad** Najděte extrémy funkce $f(x, y) = 2x - y + 12$ na množině $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 6, x^2 - 8x \leq y \leq 12 - 2x\}$.




- extrémy na hranici

  $AB$: $x = 0$
  $g(y) = -y + 12 \Rightarrow g'(y) = -1 \neq 0$
  na přímce nejsou extrémy

  $CD$: $x = 6$
  $g(y) = 24 - y \Rightarrow g'(y) = -1 \neq 0$
  na přímce nejsou extrémy

  $BD$ : $y = 12 - 2x$
  $g(x) = 2x - (12 - 2x) + 12 = 4x \Rightarrow g'(x) = 4 \neq 0$
  na přímce nejsou extrémy
- volné extrémy $\partial_x f = 2 \neq 0$
  nemá volné extrémy

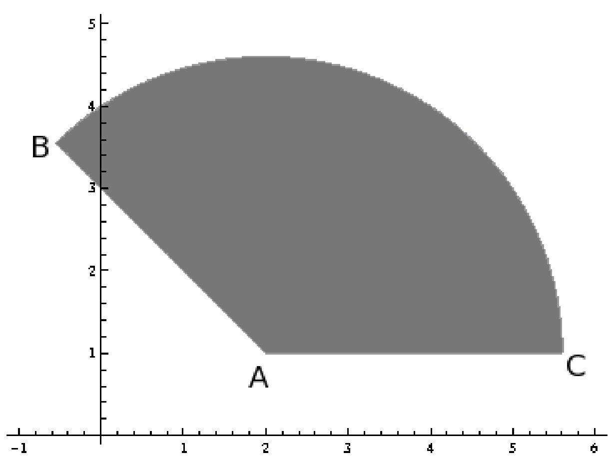
  $AC$ : $y = x^2 - 8x$
  $g(x) = 2x - (x^2 - 8x) + 12 = -x^2 + 10x + 12 \Rightarrow g'(x) = 2x + 10 = 0 \Rightarrow x = 5 \Rightarrow y = 25 - 40 = -15$
  $[5, -15] \in M$, $f(5, -15) = 37$
- hodnoty ve vrcholech

  $A: \ f(0, 0) = 12 \qquad B: \ f(0, 12) = 0 \qquad C: \ f(6, 0) = 24 \qquad D: \ f(6, -12) = 36$

Globální maximum v bodě $[5, -15]$, $f(5, -15) = 37$. Globální minimum v bodě $[0, 12]$, $f(0, 12) = 0$

**Příklad** Určete globální extrémy funkce $f(x, y) = y^2 - 2y + 4x$ na množině

$$M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; (x - 2)^2 + (y - 1)^2 \leq 13,\ x \geq -y + 3,\ y \geq 1\}.$$




- Volné extrémy funkce nemá, protože $\partial_x f = 4 \neq 0$.
- Hranice sestává ze dvou přímek a jedné části kružnice, extrémy na každé hranici určíme zvlášť.
  - $x = -y + 3$, použijeme dosazovací metodu
    1. $g(y) = f(-y + 3, y) = y^2 - 2y - 4y + 12 = y^2 - 6y + 12$
    2. $g'(y) = 2y - 6 = 0 \Rightarrow y = 3$
    3. $x = -3 + 3 = 0$
       $f(0, 3) = 3^2 - 2 \cdot 3 + 4 \cdot 0 = 3$
  - $y = 1$, použijeme dosazovací metodu
    1. $g(x) = f(x, 1) = 1^2 - 2 \cdot 1 + 4x = 4x - 1$
    2. $g'(y) = 4 \neq 0 \Rightarrow$ na této úsečce není extrém
  - $g(x, y) = (x - 2)^2 + (y - 1)^2 - 13 = 0$, použimjeme metodu Jakobiánu nebo Lagrangeových multiplikátorů (můžeme si vybrat)
    - metoda Jakobiánu
      2. $\partial_x f = 4$, $\partial_y f = 2y - 2$, $\partial_x g = 2 \cdot (x - 2) = 2x - 4$, $\partial_y g = 2(y - 1) = 2y - 2$
         $|J(x, y)| = 4 \cdot (2y - 2) - (2y - 2)(2x - 4) = (2y - 2)(4 - 2x + 4) = (2y - 2)(-2x + 8)$
      3. Řešíme soustavu rovnic

         $$(2y - 2)(-2x + 8) = 0$$
         $$(x - 2)^2 + (y - 1)^2 - 13 = 0$$

         Z první rovnice máme buď $y = 1$ nebo $x = 4$.
         $y = 1$ dosadím do druhé rovnice $(x - 2)^2 + (1 - 1)^2 - 13 = 0$, tj. $(x - 2)^2 = 13$, $x = 2 \pm \sqrt{13}$.
         $x = 4$ dosadím do druhé rovnice $(4 - 2)^2 + (y - 1)^2 - 13 = 0$, tj. $(y - 1)^2 = 9$, $y = 1 \pm 3$.
      4. · bod $[2 + \sqrt{13}, 1]$ je bod $C$. · $f(4, 4) = 4^2 + 4 \cdot 4 - 2 \cdot 4 = 24$
         · bod $[2 - \sqrt{13}, 1]$ neleží v $M$. · bod $[4, -2]$ neleží v $M$.
    - metoda Lagrangeových multiplikátorů
      2. $L(x, y) = y^2 - 2y + 4x + \lambda((x - 2)^2 + (y - 1)^2 - 13)$
      3. řešíme soustavu rovnic

         $$\begin{aligned} \partial_x L &= 4 + 2\lambda(x - 2) = 0 \\ \partial_y L &= 2y - 2 + 2\lambda(y - 1) = 0 \\ g(x, y) &= (x - 2)^2 + (y - 1)^2 - 13 = 0 \end{aligned}$$

         Z první rovnice dostáváme, že $x = 2 - \frac{2}{\lambda}$, protože $\lambda \neq 0$ (první rovnice by neplatila).
         Z druhé rovnice dostáváme, že buď $y = 1$ a nebo $\lambda = -1$.
         Pro $y = 1$ z třetí rovnice dostáváme, že $x = 2 \pm \sqrt{13}$, ale $2 - \sqrt{13} \notin M$
         Pro $\lambda = -1$ pak $x = 4$ a z třetí rovnice dopočteme, že $y = 4$
    - 4. • $f(2 + \sqrt{13}, 1) \doteq 21,42$ • $f(4, 4) = 4^2 + 4 \cdot 4 - 2 \cdot 4 = 24$
- bod A: $f(2, 1) = 2^2 - 2 \cdot 2 + 4 \cdot 1 = 4$

  bod B: musí splňovat $((-y + 3) - 2)^2 + (y - 1)^2 - 13 = 0$, tj. $2(y - 1)^2 = 13$, tj. $y = 1 + \sqrt{\frac{13}{2}}$, tedy $x = 2 - \sqrt{\frac{13}{2}}$, $\qquad f(B) \doteq 3,3$

  bod C: $f(2 + \sqrt{13}, 1) \doteq 21,42$
- globální maximum 24 se nabývá v bodě $[4, 4]$, globální minimum 3 se nabývá v bodě $[0, 3]$