Parita funkcie: (párna - sudá; lichá - nepárna)

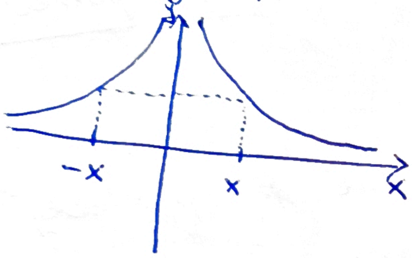
Fcia môže byť párna/nepárna pokiaľ spĺňa podmienky:

1) Definičný obor musí byť symetrický
(napr. $D_f = \mathbb{R}$; $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $D_f = \langle -3, 3 \rangle$)
(nie napr. $D_f = (0, \infty)$, $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $D_f = \langle -3, 3)$)
↳ inak povedané pre každé x musí byť v definičnom obore aj $-x$.

2) Ak je párna (sudá) potom spĺňa:

$$\boxed{\forall x \in D_f: \ f(-x) = f(x)}$$

napr. $y = \frac{1}{x^2} = x^{-2}$ (viď minule)

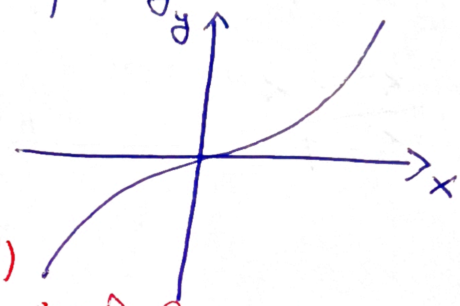


Graf fcie je symetrický osovo voči osi y.

Ak je nepárna (lichá) potom spĺňa:

$$\boxed{\forall x \in D_f: \ f(-x) = -f(x)}$$

napr. $y = x^3$



Graf fcie je symetrický voči stredu súradného systému.

Pomoc pri náčrte fcie (stačí riešiť len jednu časť D_f)

BONUS: Dokážete určiť symetriu pre obecné $y = x^n$, $n \in \mathbb{Z}$?

Pr. 1 Určte či je zadaná fcia sudá/lichá, prípadne ani jedno.

$$y = \frac{4x}{x^2 - 4}$$

D_f: $x^2 - 4 \neq 0$
$x \neq \pm 2$
$\Rightarrow D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2, +2\}$ → je symetrický ✓

Parita: $f(-x) \overset{\text{dosadím } -x \text{ do predpisu}}{=} \frac{4(-x)}{(-x)^2 - 4} = \frac{-4x}{x^2 - 4} = -f(x)$ → Fcia je nepárna (lichá).

Pr. 2

$$y = \sqrt{x^2 + 9}\, e^x$$

D_f: $x^2 + 9 \geq 0$ → to platí vždy
$D_f = \mathbb{R}$ → je symetrický ✓

Parita: $f(-x) = \sqrt{(-x)^2 + 9}\, e^{-x} = \sqrt{x^2 + 9}\, e^{-x} \neq f(x) \neq -f(x)$

Fcia nie je ani párna ani nepárna.

Pr. 3)

$$y = \frac{|x|}{x^4+2x^2+7}$$

$D_f = \mathbb{R}$ ↗ je symetrický ✓

(pretože $x^4+2x^2+7 \neq 0$ napriek tomu, že túto rovnicu nevieme riešiť priamo vidíme, že obsahuje súčet kladných výrazov a tie nebudú nula)

rovnicu možno riešiť napríklad substitúciou $y = x^2$ a previesť na kvadratickú

Parita: $$y = \frac{|-x|}{(-x)^4+2\cdot(-x)^2+7} = \frac{|x|}{x^4+2x^2+7} = f(x)$$

↳ Fcia je párna

Pr. 4)

$$y = \frac{x^3-x}{x-1}$$

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ → nie je symetrický

→ Fcia nie je ani párna ani nepárna

Pr. 5)

$$y = \frac{x^2-2x+1}{5x^2}$$

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ → je symetrický ✓

Parita: $$f(-x) = \frac{(-x)^2-2\cdot(-x)+1}{5\cdot(-x)^2} = \frac{x^2+2x+1}{5x^2} \neq f(x) \neq -f(x)$$

→ Fcia nie je ani párna ani nepárna.

Inverzná fcia: → Spôsob ako môžeme určiť obor hodnôt zadanej fcie

Fcie $f(x)$ a $g(x)$ nazývame navzájom inverzné práve vtedy ak: 1) Fcie musia byť prosté (prípadne berieme len taký interval, kde to platí)

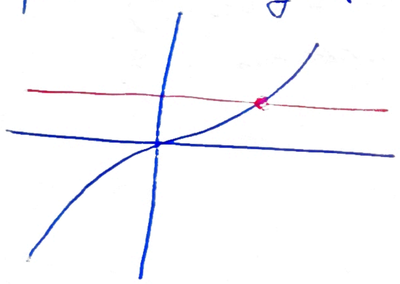
2) $f(x) = y \iff x = g(y) \quad \forall x \in D_f$ a $\forall y \in D_g$

Čo znamená, že fcia je prostá?

Def: $\forall x \in D_f: \quad x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

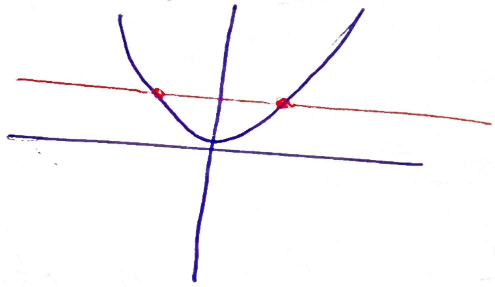
↳ inak povedané pre každé x z D_f musí existovať práve jedna hodnota $f(x)$ a žiadne ďalšie * nesmie mať túto hodnotu.

Napr. $y = x^3$



je prostá
(Ak urobíme rovnobežku s x-ovou osou, potom mi fcie pretne maximálne v jednom bode)

ale $y = x^2$ na $\mathbb{R}$ nie je prostá



nie je prostá
(Ak urobím rovnobežku s x-ovou osou pretne mi v 2 bodoch)

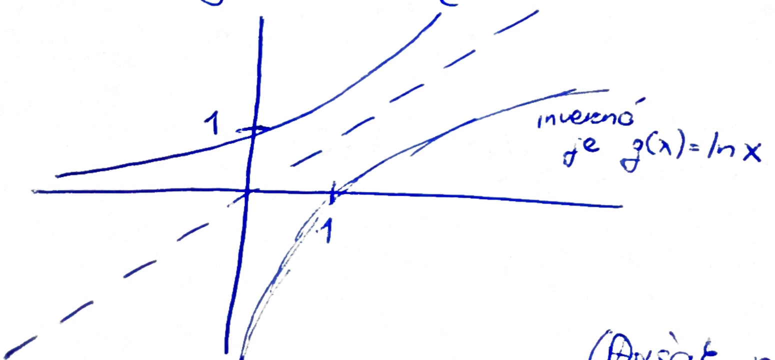
Ak je fcia prostá, potom je rýdzo-monotónna

BONUS: Dokážete určiť či je fcia prostá pre akékoľvek $n \in \mathbb{Z}$ pre $y = x^n$?

Späť k inverzným fciám:

→ Graf inverznej fcie je symetrický voči osi $y = x$

Napr. $y = e^x$



Prečo to robíme?
Lebo platí:

$$\boxed{D_f = H_g \text{ a } D_g = H_f} \; !$$

Poskytuje návod ako určiť obor hodnôt.

(Avšak nie je nutné to využiť vždy, lebo poznáme iné spôsoby - občas moc komplikované)!

Pr. 6 Určte pomocou inverznej fcie obor hodnôt fcie:

$f(x) = 2x - 1$ (My už vieme, že lineárna fcia so smernicou $a \neq 0$ je $D_f = H_f = \mathbb{R}$, ale demonštrujme postup)

$D_f = \mathbb{R} \Rightarrow H_g = \mathbb{R}$

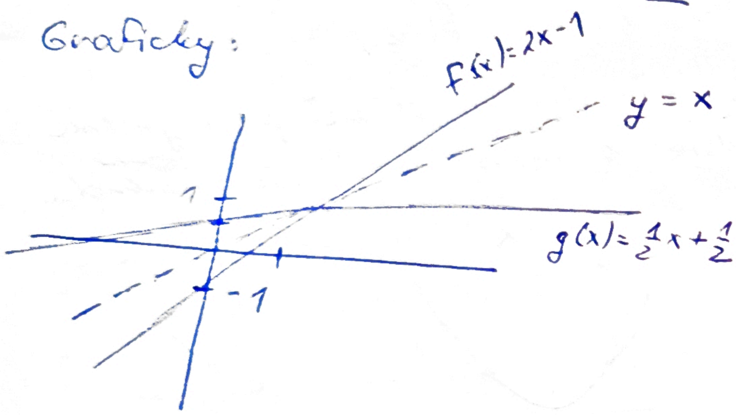
Formálne zameníme $y \Leftrightarrow x$:

$f: \; y = 2x - 1 \quad \Rightarrow \quad x = 2y - 1$

a vyjadríme y:

$g: \; y = \frac{x+1}{2} = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \qquad D_g = \mathbb{R} \Rightarrow H_f = \mathbb{R}$

Graficky:



Inverzná fcia lineárnej fcie (pre $a \neq 0$ inak by nebola prostá) je opäť lineárna fcia

Pr. 7.

$f: \; y = \frac{x+2}{2x-4} \qquad D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\} = H_g$

Zámena $y \Leftrightarrow x$:

$x = \frac{y+2}{2y-4} \quad /(2y-4)$

$x(2y-4) = y + 2$

$2xy - 4x = y + 2$

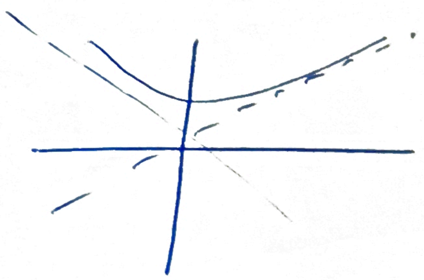
$2xy - y = 4x + 2$

$y(2x-1) = 4x + 2$

$g: \; y = \frac{4x+2}{2x-1} \Rightarrow D_g = \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\} \Rightarrow H_f = \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}$

Asymptoty:

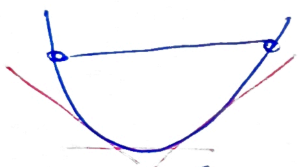
- zvislá → $x = x_0$ ak $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$
- v nekonečne s rovnicou $y = kx + q$



$$\boxed{\begin{aligned} k &= \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} \quad u \\ q &= \lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - kx) \end{aligned}}$$

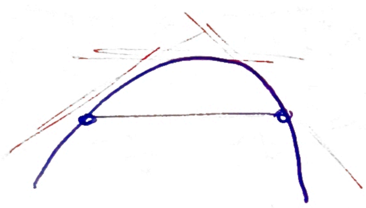
↳ Špeciálny prípad je vodorovná asymptota ak $k = 0$

konvexnosť/konkávnosť:



konvexná krivka

$$\boxed{f'' > 0}$$



konkávna krivka

$$\boxed{f'' < 0}$$

Bod, kde sa krivka mení z konvexnej na konkávnu, alebo naopak sa nazýva inflexný bod.

Pr. 8 Vyšetrite konvexnosť/konkávnosť fcií a ich asymptoty.

$$f(x) = \frac{x^2 + 6x}{2 - x} \qquad D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$$

V bode $x_0 = 2$ môže byť vertikálna asymptota → overme

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x \to 2^+} \frac{x^2 + 6x}{2 - x} &= \frac{4 + 12}{0^-} = -\infty \\ \lim_{x \to 2^-} \frac{x^2 + 6x}{2 - x} &= \frac{4 + 12}{0^+} = +\infty \end{aligned}\right\}$$

v bode $x_0 = 2$ je vertikálna asymptota

Máme vodorovnú? $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^2 + 6x}{2 - x} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^2(1 + \frac{6}{x})}{x(\frac{2}{x} - 1)} = +\infty$

a takisto ani v $-\infty$ ⇒ neexistuje vodorovná limita

Skúsme šikmú: v $+\infty$

$$k = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+6x}{x(2-x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\cancel{x^2}(1+\frac{6}{x})}{\cancel{x^2}(\frac{2}{x}-1)} = -1$$

$$q = \lim_{x\to+\infty}(f(x)-kx) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+6x}{2-x} + x$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+6x+(2-x)x}{2-x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\cancel{x^2}+6x+2x-\cancel{x^2}}{2-x} = \lim_{x\to\infty} \frac{8x}{2-x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{8\cancel{x}}{\cancel{x}(\frac{2}{x}-1)} = -8$$

$\Rightarrow$ asymptota v $+\infty$ je $y = -x-8$

A rovnakým postupom vyjde aj asymptota v $-\infty$ (rovnako).

- $$f'(x) = \frac{(2x+6)(2-x)-(x^2+6x)\cdot(-1)}{(2-x)^2}$$

$$= \frac{4x-2x^2+12-\cancel{6x}+x^2+\cancel{6x}}{(2-x)^2}$$

$$= \frac{-x^2+4x+12}{(2-x)^2}$$

$$f''(x) = \frac{(-2x+4)(2-x)^{\cancel{2}}-2(\cancel{2-x})(-1)(-x^2+4x+12)}{(2-x)^{\cancel{4}3}}$$

$$= \frac{-\cancel{4x}+\cancel{2x^2}+8-\cancel{4x}-\cancel{2x^2}+\cancel{8x}+24}{(2-x)^3}$$

$$= \frac{32}{(2-x)^3}$$

konkávna na $(2,\infty)$

konvexná na $(-\infty,2)$