# Monotónia funkcie:

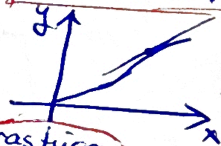
- Vyšetrujeme vlastnosť fcie na určitom intervale. Fcia môže byť:

Ⓐ RASTÚCA (NEKLESAJÚCA)

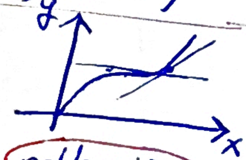
ČO TO ZNAMENÁ Z POHĽADU DERIVÁCIÍ?

Fcia je rastúca (neklesajúca) na intervale I ak:

$$\boxed{\begin{array}{l}\forall x_1, x_2 \in I:\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)\\ (\forall x_1, x_2 \in I:\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2))\end{array}} \Longrightarrow \boxed{\begin{array}{l}\forall x \in I:\ f'(x) > 0\\ (\forall x \in I:\ f'(x) \geq 0)\end{array}}$$



rastúca
(v každom bode je smernica dotyčnice kladná)

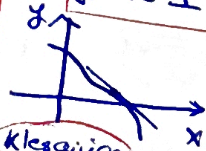


neklesajúca

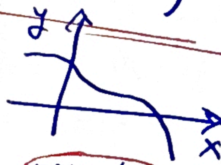
Ⓑ KLESAJÚCA (NERASTÚCA)

Fcia je klesajúca (nerastúca) na intervale I ak:

$$\boxed{\begin{array}{l}\forall x_1, x_2 \in I:\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)\\ (\forall x_1, x_2 \in I:\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2))\end{array}} \Longrightarrow \boxed{\begin{array}{l}\forall x \in I:\ f'(x) < 0\\ (\forall x \in I:\ f'(x) \leq 0)\end{array}}$$



klesajúca
(v každom bode je smernica dotyčnice záporná)



nerastúca

Ⓒ KONŠTANTNÁ!

↳ Fcia je zároveň nerastúca a neklesajúca na intervale I

$\boxed{\forall x \in I:\ f'(x) = 0}$ → Body, kde sa toto deje nazývame stacionárny bod – možný kandidát na extrém.

Pozn. Ak je fcia nerastúca alebo neklesajúca na I → je monotónna → Vyšetrujeme tieto intervaly monotónnosti

## Čo sú to extrémy fcie:

Ⓐ MAXIMUM:

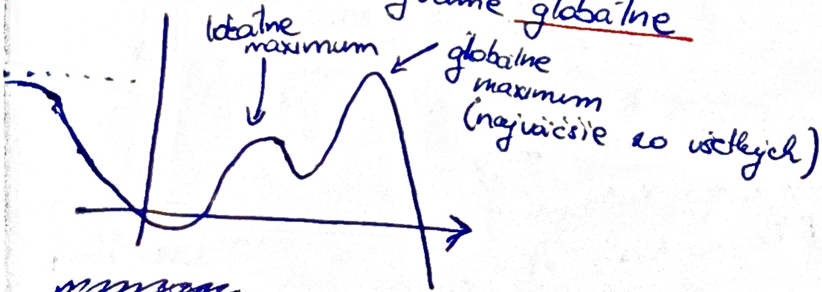
Fcia má v bode $x_0 \in D_f$ maximum pokiaľ $\forall x \in I:\ f(x_0) > f(x)$

→ ostré lokálne maximum

príp. $\forall x \in I:\ f(x_0) \geq f(x)$

→ neostré lokálne maximum

Ak je $I = D_f$ potom toto maximum nazývame globálne




každý globálny extrém je zároveň aj lokálnym

Ⓑ Minimum

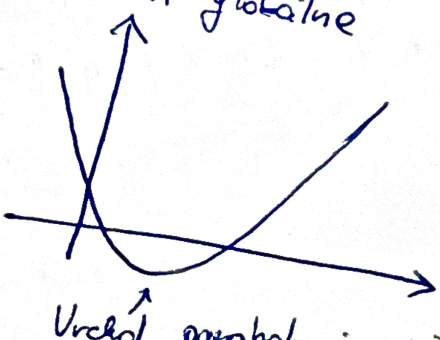
Fcia má v bode $x_0 \in D_f$ minimum pokiaľ $\forall x \in I:\ f(x_0) < f(x)$

→ ostré lokálne minimum

príp. $\forall x \in I:\ f(x_0) \leq f(x)$

→ neostré lokálne minimum

Ak je $I = D_f$, potom je toto minimum globálne



Vrchol paraboly je zároveň lokálne aj globálne min…

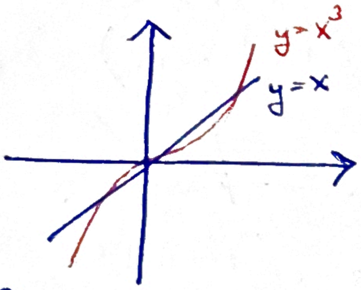
Príklady na mocninových a iných fciách: $n \in \mathbb{N}$ (Desmos)

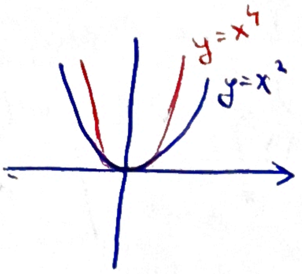
a) $y = x^{2n+1}$ (napr. $y=x$, $y=x^3$, $y=x^5$)

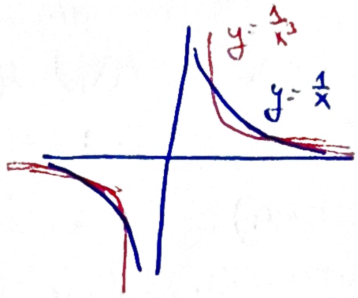
b) $y = x^{2n}$ (napr. $y=x^2$, $y=x^4$)

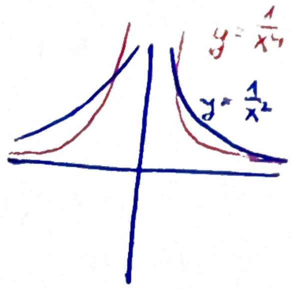
c) $y = x^{-2n+1}$ (napr. $y=x^{-1}=\frac{1}{x}$, $y=x^{-3}=\frac{1}{x^3}$)

d) $y = x^{-2n}$ (napr. $y=x^{-2}=\frac{1}{x^2}$, $y=x^{-4}=\frac{1}{x^4}$)




Pr.
$y = x^3 \quad D_f = \mathbb{R}$

$y' = 3x^2 \geq 0$

Fcia je rastúca na celom $D_f$

Stacionárny bod:

$y'=0 \Rightarrow 3x^2=0$
$x=0$

Avšak bod $x=0$ nie je extrémom
$\Rightarrow$ Nie každý stac. bod je extrém (je to inflexný bod)

$y = x^2 \quad D_f = \mathbb{R}$

$y' = 2x$

Pre $x<0$ fcia klesá

Pre $x>0$ fcia rastie

$\Rightarrow$ Bod $x=0$ je lokálnym (aj glob. minimom)

Stacionárny bod

$y'=0 \Rightarrow 2x=0$
$x=0$
(sedí)

↳ Teraz bol stacion. bod extrémom

$y = \frac{1}{x} \quad D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$y' = -\frac{1}{x^2}$

Nakoľko $x^2>0$ pre $x \in D_f$, tak fcia je klesajúca na oboch intervaloch (POZOR NIE NA CELOM $D_f$, lebo to nie je interval)

$\Rightarrow$ Stacionárny bod neexistuje, lebo $y'=0$ sa nedá splniť pre žiadne $x$.

$y = \frac{1}{x^2} \quad D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$y' = -\frac{2}{x^3}$

$x^3>0$ pre $x>0$
$\Rightarrow$ klesajúca

$x^3<0$ pre $x<0$
$\Rightarrow$ rastúca

Napriek tomu ani táto fcia nemá extrém v bode 0, lebo tam nemá vlastnú limitu ($x_0 \notin D_f$)

↳ Musíme nájsť spôsob ako odlíšiť extrémy od iných bodov

FAQ:

Ako určiť, či je stacionárny bod zároveň extrémom?

↳ Pomocou druhej derivácie:

Ak $f''(x_0) > 0 \rightarrow$ Minimum

$f''(x_0) < 0 \rightarrow$ Maximum

↳ Pomocou hodnôt v výnimočných bodoch → Rozdelíme fciu na intervaly, kde je fcia rýdzomon.

↳ Pomocou znamienka derivácie v okolí bodu

Čo všetko môže byť extrém

$V_f$ – „množina výnimočných bodov" → a) stacionárne body

b) body, kde je nekonečná derivácia (alebo n

c) krajné body $D_f$

Ako odlíšiť lokálne a globálne minimum.

- Ak je extrémov konečné množstvo → dosadíme funkčné hodnoty a vyberieme globálne.
- Ak fcia diverguje – nemá glob.

Pr-1

$$f(x) = 2x^3 - x^2 - 8x + 4$$

$D_f = \mathbb{R}$ => krajné body intervalu sú $\pm\infty$

Spočítame limity v krajných bodoch:

$$\lim_{x\to+\infty} 2x^3 - x^2 - 8x + 4 = \lim_{x\to+\infty} x^3\left(2 - \frac{1}{x} - \frac{8}{x^2} + \frac{4}{x^3}\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} x^3 \cdot \lim_{x\to\infty}\left(2 - \overset{\to 0}{\frac{1}{x}} - \overset{\to 0}{\frac{8}{x^2}} + \overset{\to 0}{\frac{4}{x^3}}\right)$$

$$= +\infty \cdot 2 = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} x^3\left(2 - \frac{1}{x} - \frac{8}{x^2} + \frac{4}{x^3}\right) = -\infty \cdot 2 = -\infty$$

} Fcia rastie a klesá nado všetky medze => nebude mať globálny extrém

$$f'(x) = 6x^2 - 2x - 8$$

Stacionárne body: $f'(x) = 0 = 6x^2 - 2x - 8$

$$0 = 3x^2 - x - 4$$

$$D = b^2 - 4ac = 1 + 4\cdot 3\cdot 4 = 49$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} \quad \begin{cases} \frac{1+7}{6} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3} \\ \frac{1-7}{6} = -1 \end{cases}$$

Body $\frac{4}{3}$ a $-1$ sú kandidáti na extrém. Je to tak?

2 f'':

a) $f''(x) = 12x - 2$ => $f''\left(\frac{4}{3}\right) = 12\cdot\frac{4}{3} - 2 = 14 > 0$ => minimum

$f''(-1) = 12\cdot(-1) - 2 = -14 < 0$ => maximum.

2 f:

b) $f\left(\frac{4}{3}\right) = 2\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^3 - \left(\frac{4}{3}\right)^2 - 8\cdot\left(\frac{4}{3}\right) + 4 = 2\cdot\frac{64}{27} - \frac{16}{9} - \frac{32}{3} + 4$

$$= \frac{128 - 48 - 288 + 108}{27} = -\frac{100}{27}$$

$$f(-1) = 2\cdot(-1)^3 - (-1)^2 - 8\cdot(-1) + 4 = -2 - 1 + 8 + 4 = 9$$

Takže situácia je takáto:

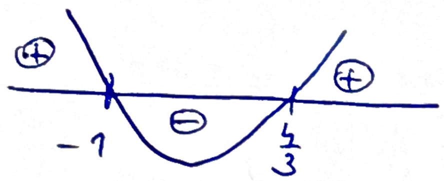
| $x$ | $-\infty$ | $-1$ | $\frac{4}{3}$ | $\infty$ |
|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $-\infty$ | $9$ | $-\frac{100}{27}$ | $\infty$ |
| | ↗ | ↘ | ↗ | |

=> Bod $-1$ je maximum,
Bod $\frac{4}{3}$ je minimum.

Takisto sme intervaly monotónnosti mohli určiť ako:

$$f'(x) = 6x^2 - 2x - 8 = (x+1)(x-\tfrac{4}{3})$$

NB: $-1, \frac{4}{3}$




alebo určíme z grafu

Vyberieme body z intervalu a dosadíme
→ Derivácia je daná znamienkom

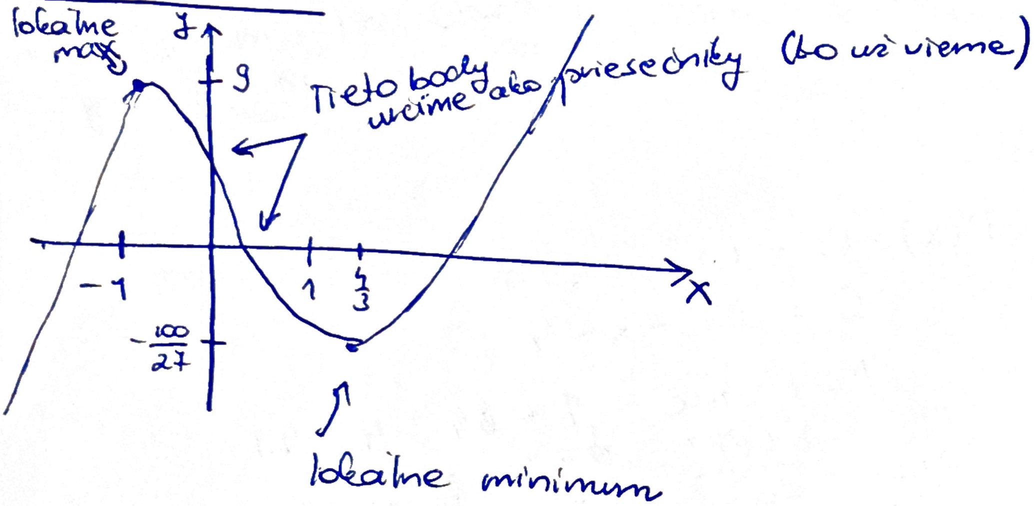
⇒ Fcia rastie na intervale $(-\infty,-1)\cup(\frac{4}{3},\infty)$

Fcia klesá na intervale $(-1,\frac{4}{3})$

⇒ Bod $-1$ je maximum (lokálne)

Bod $\frac{4}{3}$ je minimum (lokálne)

Graf Fcie:



## Pr. 2

$$f(x)=\frac{10x+10}{x^2}$$

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\} \Rightarrow$ krajné body sú $\pm\infty$ a $0$.

Limity v krajných bodoch:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{10x+10}{x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{x(10+\frac{10}{x})}{x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{10+\frac{10}{x}}{x}=\frac{10}{\infty}=0$$

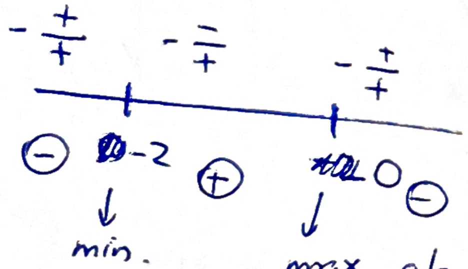
tak isto pre $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{10x+10}{x^2}=\frac{10}{-\infty}=0$

$$\left.\begin{aligned}\lim_{x\to0^+}\frac{10x+10}{x^2}&=\frac{10}{0^+}=+\infty\\ \lim_{x\to0^-}\frac{10x+10}{x^2}&=\frac{10}{0^+}=+\infty\end{aligned}\right\}$$

Fcia opäť diverguje, takže nebude mať globálny extrém

$$f'(x)=\frac{10x^2-(10x+10)2x}{x^4}=\frac{10x^2-20x^2-20x}{x^4}=-\frac{10x^2+20x}{x^4}$$

Stacionárne body: $f'(x)=0 \Rightarrow -\frac{10x^2+20x}{x^4}=0$




Vyberieme si body a dosadíme

$10x^2+20x=0$

$x(10x+20)=0$

$x=0 \Rightarrow$ nie je v def. obore, nemôže byť extrém

$x=-2$

Fcia rastie na intervale $(-2,0)$

Fcia klesá na intervale $(-\infty,-2)\cup(0,\infty)$

Bod $-2$ je lokálne minimum.

b) Druhý spôsob: $f(-2)=\frac{10\cdot(-2)+10}{(-2)^2}=-\frac{10}{4}=-\frac{5}{2}$

Situácia je takáto

| $x$ | $-\infty$ | $-2$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $0$ | $-\frac{5}{2}$ | $+\infty$ | $0$ |
| | ↘ | ↗ | ↘ | |

Bod $-2$ je minimum

Bod $0$ nemôže byť extrém, lebo $0\notin D_f$.

Vieme to overiť cez $f''$:

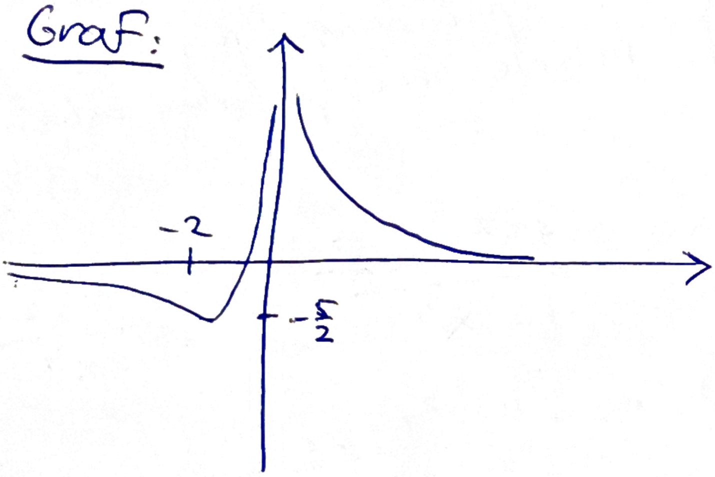
$$f''(x) = \frac{(-10x-20)x^4 - (-10x^2-20x)4x^3}{x^8} = \frac{-10x^5-20x^4+40x^5+80x^4}{x^8}$$

$$= \frac{20x^5+60x^4}{x^8}$$

$$= \frac{20x+60}{x^4} = \frac{20(x+3)}{x^4}$$

$$f''(-2) = \frac{20\cdot(-2+3)}{(-2)^4} = \frac{20}{16} > 0 \Rightarrow \text{minimum (skutočne)}$$

Graf:



**Pr 3**

$f(x) = \sqrt{x^2-8x+20}$ $\cancel{D_f = \mathbb{R}}$

$D_f: x^2-8x+20 \geq 0$

$D = b^2-4ac = 64-4\cdot 20 = -16$

$\Rightarrow$ Ako rovnica to nemá riešenie, avšak ako nerovnica je situácia takáto

$a = 1 > 0$
$\Rightarrow$ smeruje nahor a celá je nad x-ovou osou

Limity v krajných bodoch

$$\lim_{x\to\infty}\sqrt{x^2-8x+20} = \lim_{x\to\infty}\sqrt{x^2\left(1-\frac{8}{x}+\frac{20}{x^2}\right)}$$

$$= \lim_{x\to\infty}|x|\cdot\lim_{x\to\infty}\sqrt{1-\frac{8}{x}+\frac{20}{x^2}}$$

$$= +\infty\cdot 1 = +\infty$$

Rovnako:

$$\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2-8x+20} = \lim_{x\to-\infty}|x|\lim\sqrt{1-\frac{8}{x}+\frac{20}{x^2}}$$

$$= +\infty\cdot 1 = +\infty$$

$\Rightarrow$ Nerovnica je splnená $\forall x\in\mathbb{R}$: $\Rightarrow$ $\boxed{D_f = \mathbb{R}}$

$\Rightarrow$ Fcia nemôže mať ~~lokálne~~ globálne maximum

$\to$ Fcia opäť diverguje, takže nebude mať ~~lokálne~~ globálne extrémy.

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^2-8x+20}}\cdot(2x-8) = \frac{2x-8}{2\sqrt{x^2-8x+20}} = \frac{x-4}{\sqrt{x^2-8x+20}}$$

Stacionárne body:

$$f'(x) = 0$$

$$\frac{x-4}{\sqrt{x^2-8x+20}} = 0$$

$$x-4 = 0$$

$$x = 4$$

Tu počítať druhú deriváciu by bolo náročné $\to$ využijeme iný spôsob, ako určiť či sa jedná o extrém.

$\mp$ $\pm$

$-$ 4 $+$

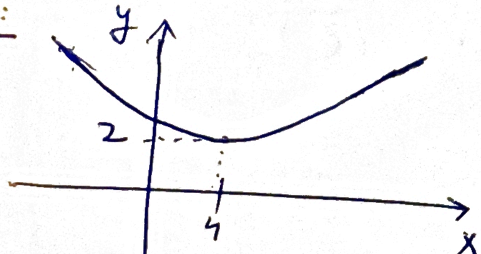
min

Dosadíme do $f'(x)$ a určíme znamienko derivácie.

$\Rightarrow$ Fcia klesá na $(-\infty, 4)$
Fcia rastie na $(4,\infty)$ $\Rightarrow$ Bod 4 je lokálnym minimom (a zároveň globálne)

$f(4) = \sqrt{16-8\cdot 4+20} = 2$

Graf:




Bonus: Skúste si takýto príklad spočítať ak $D\neq\mathbb{R}$ (DÚ 12 pr. B) alebo DÚ 11 pr. 2

Pr. 4,

$f(x) = (1-2x)e^x$ $\qquad D_f = \mathbb{R} \Rightarrow$ krajné body $\pm\infty$

Limity v krajných bodoch:

$\lim\limits_{x\to\infty} (1-2x)e^x = -\infty \cdot +\infty = -\infty \Rightarrow$ Fcia nemôže mať globálne minimum

$\lim\limits_{x\to-\infty} (1-2x)e^x \overset{\infty \cdot 0}{=} \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1-2x}{e^{-x}} \underset{L.H}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{-2}{-e^{-x}} = \frac{2}{\infty} = 0$

$f'(x) = -2e^x + (1-2x)e^x = e^x(-2+1-2x) = e^x(-2x-1)$

$= -e^x(2x+1)$

Stacionárny bod: $\quad f'(x) = 0 \Rightarrow -e^x(2x+1) = 0$

Vieme, že $e^x > 0$

$\Rightarrow 2x+1 = 0$

$x = -\frac{1}{2}$ je stac. bod

$- \cdot -$ $\qquad - \cdot +$

$+ \qquad -\frac{1}{2} \qquad -$

$\downarrow$

lokálne maximum

Fcia rastie na $(-\infty, -\frac{1}{2})$

Fcia klesá na $(-\frac{1}{2}, \infty)$

} Bod $-\frac{1}{2}$ je lokálnym (a zároveň globálnym) maximom

Z druhej derivácie:

$f''(x) = -e^x(2x+1) - 2e^x = -e^x(2x+3)$

$f''(-\frac{1}{2}) = -e^{-\frac{1}{2}} \cdot (2 \cdot (-\frac{1}{2}) + 3) = -\underbrace{e^{-\frac{1}{2}}}_{>0} \cdot \underbrace{2}_{>0} = \to$ niečo záporné $\to$ je to maximum

Graf:

$f(-\frac{1}{2}) = (1 - 2(-\frac{1}{2}))e^{-\frac{1}{2}} = \frac{2}{\sqrt{e}}$