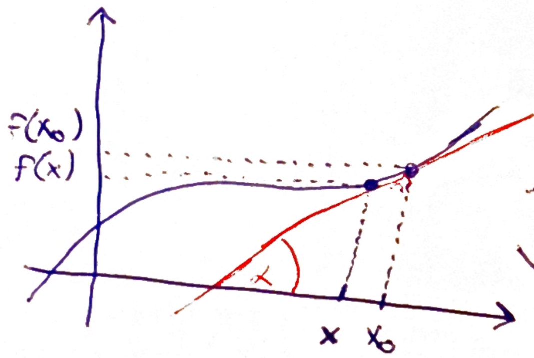
# Derivácie

Nech $f(x)$ je spojitá fcia jednej premennej. Potom deriváciou funkcie $f(x)$ v bode $x_0$ nazveme: $f(x) = y$

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{df(x)}{dx} \equiv f'(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}$$

→ Derivácia vyjadruje mieru zmeny danej fcie




Limitne sa približujeme k bodu $x$

Ak to spravíme pre každý bod, potom získame $f'$.

Už vieme, že pre lineárnu fcie platí $\boxed{y = kx + q}$, kde $k$... smernica

$$\boxed{k = tg\,\alpha = \frac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x}}$$

↳ Čo je rovnaký výraz až na limitu, takže derivácia predstavuje akoby „smernicu" v každom bode

Poznámka:

- Pre funkcie/funkčné predpisy teda nepočítame ako limitu v každom bode, ale odvodzujeme pre ne vzťahy z predpisu vyššie.
- Ak je fcia nespojitá, potom zase poznáme jednostranné derivácie:

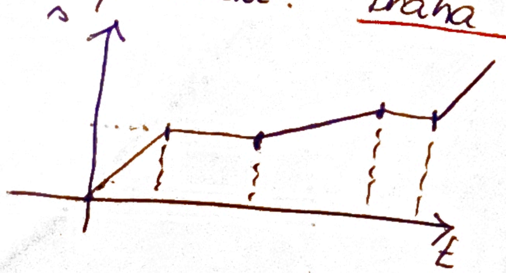
Derivácia sprava: $\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

Derivácia zľava: $\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

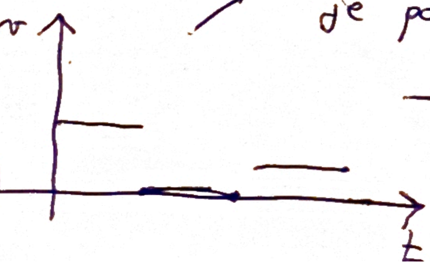
Na čo sú nám derivácie dobré?

- Napríklad vyšetrovanie monotónnosti, konkávnosti fcie (miesto prielomu fcie)
- Určovanie rovnice dotyčnic k funkciam v danom bode
- L'Hospitalovo pravidlo, pre výpočet limít

Príklad použitia: Dráha a rýchlosť




$s'(t) = \frac{ds}{dt} = v(t)$




Druhou deriváciou je potom zrýchlenie...

# Pravidlá pre počítanie derivácií: → Odporúčam stránku khanacademy.org/math/calculus-1 ← Výborne vysvetľuje teóriu od základov.

## Základné odvodené vzťahy

Derivácia konštanty: $f(x) = c$ ; $c \in \mathbb{R}$ → $f'(x) = 0$

Derivácia mocniny: $f(x) = x^{\alpha}$ ; $\alpha \in \mathbb{R}$ → $f'(x) = \alpha x^{\alpha - 1}$

Derivácia exponenciály: $f(x) = e^{x}$ → $f'(x) = e^{x}$

$f(x) = a^{x}$ → $f'(x) = a^{x} \ln a$

Derivácia logaritmu: $f(x) = \ln x$ → $f'(x) = \frac{1}{x}$

$f(x) = \log_a x$ → $f'(x) = \frac{1}{x \ln a}$

+ďalšie, ktoré nepotrebujeme

## Pre ďalšie kombinácie týchto fcií:

Derivácia fcie vynásobenej konštantou: $(cf)' = c \cdot f$

Derivácia súčtu / rozdielu: $(f \pm g)' = f' \pm g'$

Derivácia súčinu: $(f \cdot g)' = f'g + fg'$

Derivácia podielu: $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^{2}}$

Leibnizovo pravidlo

Derivácia zloženej fcie: $f(g(x))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

Reťazové pravidlo „chain rule"

Ako určovať kde je derivácia definovaná?

→ Určíme $D_f$ pôvodnej fcie

→ Určíme $D_{f'}$ zderivovanej fcie

↳ Derivácia nemôže existovať tam, kde neexistovala pôvodná fcia.

## Príklady:

① $f(x) = x^{10}$

$f'(x) = 10x^{10-1} = 10x^{9}$

$\because (x^a)' = a x^{a-1}$

② $f(x) = 3x^6 + 2x^2 + 7$

$f'(x) = 3\cdot 6x^{6-1} + 2\cdot 2\cdot x^{2-1} + 0 = 18x^5 + 4x$

$\because (c)' = 0$ + derivácia súčtu

③ $f(x) = \sqrt{x} - \sqrt[3]{x} \overset{\text{prepis}}{=} x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{3}}$

$f'(x) = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} - \frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$

$= \frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{3x^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

$\because a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ + derivácia rozdielu

④ $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{4x^4} \overset{\text{prepis}}{=} x^{-1} + \frac{1}{4}x^{-4}$

$f'(x) = -1\cdot x^{-1-1} + \frac{1}{4}\cdot(-4)\cdot x^{-4-1} = -x^{-2} - x^{-5} = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^5}$

$\because x^{-m} = \frac{1}{x^m}$

⑤ $f(x) = x^2 \ln x$

$f'(x) = 2x\ln x + x^2\cdot\frac{1}{x} = 2x\ln x + x = x(2\ln x + 1)$

$\because (f\cdot g)' = f'g + fg'$ a $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

⑥ $f(x) = (-4x^2 + 5x + 3)e^x$

$f'(x) = (-8x + 5)e^x + (-4x^2 + 5x + 3)e^x$

$= e^x(-8x + 5 - 4x^2 + 5x + 3) = e^x(-4x^2 - 3x + 8)$

$\because (e^x)' = e^x$

⑦ $f(x) = \frac{x-6}{x^3 - 2x}$

$\because \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$

$f'(x) = \frac{1\cdot(x^3 - 2x) - (x-6)(3x^2 - 2)}{(x^3 - 2x)^2} = \frac{x^3 - 2x - (3x^3 - 2x - 18x^2 + 12)}{(x^3 - 2x)^2}$

Nemá zmysel roznásobovať menovateľ

$= \frac{x^3 - \cancel{2x} - 3x^3 + \cancel{2x} + 18x^2 - 12}{(x^3 - 2x)^2} = \frac{-2x^3 + 18x^2 - 12}{(x^3 - 2x)^2}$

8) $f(x) = \dfrac{5}{2x-9}$

$$f'(x) = \frac{0\cdot(2x-9) - 5\cdot 2}{(2x-9)^2} = -\frac{10}{(2x-9)^2}$$

Tento posledný príklad sa dal riešiť aj cez reťazové pravidlo:

$$f(x) = \frac{5}{2x-9} = 5(2x-9)^{-1}$$

vnútorná fcia $g(x) = 2x-9$

vonkajšia fcia $f(x) = x^{-1}$

Nakoľko derivácia $(cf)' = c\cdot f'$ kde $c \in \mathbb{R}$, potom:

$$f'(x) = 5\cdot\frac{-1}{(2x-9)^2}\cdot 2 = -\frac{10}{(2x-9)^2}$$

9) $(x^2+1)^9$

vnútorná fcia: $g(x) = x^2+1$

vonkajšia fcia $f(x) = x^9$

$$f'(x) = 9(x^2+1)^8\cdot 2x = 18x(x^2+1)^8$$

10) $f(x) = \dfrac{\sqrt{4x^3-x}}{x}$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{4x^3-x}}\cdot(12x^2-1)x - \sqrt{4x^3-x}\cdot 1}{x^2}$$

$$f'(x) = \frac{\frac{(12x^2-1)x}{2\sqrt{4x^3-x}} - \sqrt{4x^3-x}}{x^2}$$

Toto je síce zderivované, ale chceme krajší tvar

$$= \frac{12x^3-x-2\cdot(4x^3-x)}{2\sqrt{4x^3-x}\cdot x^2} =$$

$$= \frac{12x^3-x-8x^3+2x}{2\sqrt{4x^3-x}\cdot x^2}$$

$$= \frac{4x^2+1}{2x\sqrt{4x^3-x}}$$

(11) $f(x) = (x^2+7)\,e^{(-3x^2-5x)}$   ∴ derivácia súčinu a zloženej fcie

$$f'(x) = 2x\cdot e^{-3x^2-5x} + (x^2+7)\cdot e^{-3x^2-5x}\cdot(-6x-5)$$
$$= e^{(-3x^2-5x)}\left(2x + (x^2+7)(-6x-5)\right)$$
$$= e^{-3x^2-5x}\left(2x + (-6x^3-5x^2-42x-35\right)$$
$$= e^{-3x^2-5x}\left(-6x^3-5x^2-40x-35\right)$$
$$= -e^{-3x^2-5x}\left(6x^3+5x^2+40x+35\right)$$

(12) $f(x) = \sqrt{x^3-2^x}\,\ln(x^2+1)$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^3-2^x}}\left(3x^2-\ln 2\cdot 2^x\right)\ln(x^2+1) + \frac{\sqrt{x^3-2^x}}{x^2+1}\,2x$$

→ ponecháme tento tvar, lebo nič lepšie z toho pravdepodobne nedostaneme.

(13) $f(x) = \dfrac{e^{-x}}{-x^3+2x+\log x}$

$$f'(x) = \frac{-e^{-x}(-x^3+2x+\log x) - e^{-x}\left(-3x^2+2+\frac{1}{x\ln 10}\right)}{(-x^3+2x+\log x)^2}$$
$$= -e^{-x}\,\frac{-x^3+2x+\log x-3x^2+2+\frac{1}{x\ln 10}}{(-x^3+2x+\log x)^2}$$
$$= -e^{-x}\,\frac{-4x^3+2x+\log x+2+\frac{1}{x\ln 10}}{(-x^3+2x+\log x)^2}$$

Ďalšie príklady: Spočítajte si príklady z DÚ 8
Skúste si spočítať príklady z predošlých minitestov
Ak by nebolo dosť máte k dispozícii:
• zbierku na mojej stránke, žltú učebnicu, ...

POČÍTAŤ!
POČÍTAŤ!
POČÍTAŤ!

## Ďalšie príklady až niekedy čas:

1* $f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{2x}\right)$

Záverečný Test ZS 2021/22 Variamta A

(Súčasť príkladu je aj cvičenie $D_f$ a $D_{f'}$) ⤳ preskočíme, lebo teraz sa učíme derivovať.

$$f'(x) = \frac{1}{\frac{x+1}{2x}} \cdot \frac{1\cdot 2x - 2\cdot(x+1)}{(2x)^2}$$

$$= \frac{2x}{x+1} \cdot \frac{\cancel{2x} - \cancel{2x} - 1}{4x^2} = -\frac{\cancel{2x}}{4x^{\cancel{2}}(x+1)} = \frac{1}{2x(x+1)}$$

2* $f(x) = e^{3x^2+2x-1} + \frac{4x+1}{x^2-3x}$

Priebežný Test ZS 2021/22 Variamta A

$$f'(x) = (6x+2)e^{3x^2+2x-1} + \frac{4(x^2-3x) - (4x+1)\cdot(2x-3)}{(x^2-3x)^2}$$

$$= (6x+2)e^{3x^2+2x-1} + \frac{4x^2-12x - (8x^2-12x+2x-3)}{(x^2-3x)^2}$$

$$= (6x+2)e^{3x^2+2x-1} + \frac{-4x^2-2x+3}{x^2-3x}$$

$$= (6x+2)e^{3x^2+2x-1} - \frac{4x^2+2x-3}{x^2-3x}$$