Cvičenie 4: Limity a postupnosti

Postupnosť – usporiadaná sada čísel (číselná postupnosť). Zobrazenie $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$, pričom a_n … n-tý člen postupnosti, n … index

$(a_n)_{n=1}^{m}$

KONEČNOSŤ
- konečná $m \in \mathbb{N}$
- nekonečná $m = \infty$ (často hovoríme o „radách")

MONOTÓNIA (RÝDZOMONOTÓNNOSŤ)
- rastúca (resp. neklesajúca) $\forall i: a_i > a_{i-1}$ $(a_i \geq a_{i-1})$
- klesajúca (resp. nerastúca) $\forall i: a_i < a_{i-1}$ $(a_i \leq a_{i-1})$

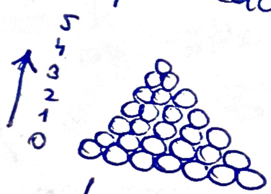
OHRANIČENOSŤ
- ZDOLA OHRANIČENÁ $\exists d \in \mathbb{R}, \forall i: a_i \geq d$
- ZHORA OHRANIČENÁ $\exists h \in \mathbb{R}, \forall i: a_i \leq h$

Príklady postupností: ① Aritmetická postupnosť:

$$\boxed{a_n = a_0 + nd}$$

– každý člen sa líši od predošlého o istú diferenciu d

(napr. sedadlá v kine, drevá naukladané na sebe…



rad (n)	0	1	2	3	4	5	6	7
počet (a_n)	7	6	5	4	3	2	1	0

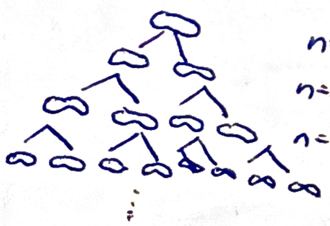
↳ konečná klesajúca postupnosť aritmetická s diferenciou -1 ⟹ predpis $\boxed{a_n = 7 - n}$

② Geometrická postupnosť

$$\boxed{a_n = a_0 \cdot q^n}$$

– každý člen sa líši od predošlého q-krát, kde q predstavuje kvocient

(napr. delenie buniek, rozdelenie, šírenie koronavírusu, …)



n=0

n=1

n=2

n=3

Rastúca postupnosť geometrická s kvocientom $q=2$

⟹ predpis $\boxed{a_n = 2^n}$

③ Iné postupnosti

Napr.
- postupnosť druhých mocnín $a_n = n^2$ … 1, 4, 9, 16, 25, …
- Fibonacciho postupnosť: 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, …
  $a_n = a_{n-2} + a_{n-1}$; $a_0 = 0$ $a_1 = 1$
- Náhodná postupnosť: −1, 1, 2, −3, 5, −7, 10, −101, …

prípadne kombinácie rôznych postupností ←

Ako môžeme zadať postupnosť?

1) Vypísaním jej členov   napr. $1, 4, 9, 16, 25, \dots$
$4, 8, 12, 16, 24, \dots$

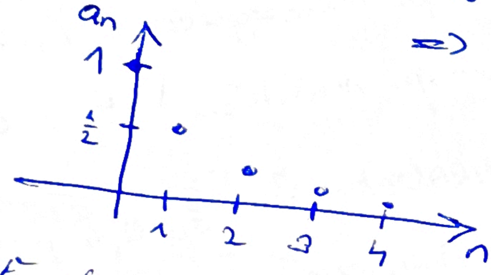
2) Predpisom pre n-tý člen

napr. $a_n = \dfrac{2^n + 1}{3n + n^2}$

3) Rekurentne → zadám prvý člen (alebo prvých niekoľko a ostatné dopočítam podľa vzťahu pre ďalší)

napr. Fibonacci alebo $a_0 = 1 \quad a_{n+1} = \dfrac{a_n}{2}$

$\Rightarrow 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots$



Bonus: Viete povedať ako vyzerá rekurentný predpis pre všeobecnú aritmetickú či geometrickú postupnosť?

Poznámky:
- Pri postupnostiach sa často určuje aj ich súčet (ak existuje a je konečné číslo) → to my robiť nebudeme, ale existujú vzorce pre súčet aritmetickej alebo geometrickej postupnosti (rady)
- My najčastejšie budeme mať zadanú postupnosť jej predpisom a budeme skúmať, ako sa správa pre veľmi veľké n. ($n \to \infty$)

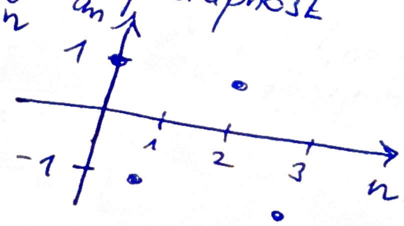
→ Skúmame limitu postupnosti $\boxed{\lim_{n\to\infty} a_n = A}$ $\left(a_n \xrightarrow{n\to\infty} A\right)$ $\boxed{A \in \mathbb{R}^*}$

Pokiaľ $A \in \mathbb{R}$: Postupnosť má limitu konečnú – hodnoty post. sa blížia k hodnote A
↳ KONVERGUJE k A.

$A = \pm\infty$: Postupnosť DIVERGUJE

Pokiaľ $\lim_{n\to\infty} a_n$ neexistuje → napr. oscilujúca postupnosť
$a_n = (-1)^n$

neexistuje žiadne číslo „ku ktorému sa blíži nekonečne blízko" ani nerastie (neklesá) nadovšetky medze ←



Poznámka: pri zavedení limity sme používali označenie $A \in \mathbb{R}^*$
$\mathbb{R}^*$ znamená $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

Čo je dobré pri počítaní limít vedieť:

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} n^{\alpha} = \begin{cases} 0 & ; \alpha < 0 \\ 1 & ; \alpha = 0 \\ \infty & ; \alpha > 0 \end{cases}}$$

napr. $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

→ samé jednotky → konštantná postupnosť

napr. $\lim_{n\to\infty} n = \infty$

↳ zároveň platí, že čím väčšia mocnina, tým rýchl. pôjde do ∞ → dominantný člen prebije ostatné.

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} a^{n} = \begin{cases} \nexists & ; a \leq -1 \\ 0 & ; a \in (-1,1) \\ 1 & ; a = 1 \\ \infty & ; a > 1 \end{cases}}$$

obrázky nakresliť pre prvých pár členov, kde je to vidieť

Napr. $\lim_{n\to\infty} 3^n = \infty$ ale $\lim_{n\to\infty} 3^{-n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3^n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$

Vety o aritmetike limít: (na $\mathbb{R}^*$)

Pokiaľ $\lim_{n\to\infty} a_n = A$ a $\lim_{n\to\infty} b_n = B$ $\quad A, B \in \mathbb{R}^*$

Potom:

$$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n = A + B$$

$$\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n = A \cdot B$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n} = \frac{A}{B}$$

Pozor: Výrazy napravo musia dávať zmysel

Nedefinované výrazy:

$+\infty - \infty$

$\pm\infty \cdot 0$

$\frac{\pm\infty}{0}, \frac{a}{0}, \frac{0}{0}$

$\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$

na tieto prípady musíme múdrejšie a vyušiť finty...

Tiež ∞^0, 1^∞ a 0^0

(A) Priamy výpočet limít:

veta o aritmetike limít

Pr. 1: $$\lim_{n\to\infty}\left[\left(\tfrac{3}{4}\right)^n + n^2 + 3n - 1\right] = \lim_{n\to\infty}\left(\tfrac{3}{4}\right)^n + \lim_{n\to\infty} n^2 + \lim_{n\to\infty} 3n - \lim_{n\to\infty} 1$$

$$= 0 + \underbrace{\lim_{n\to\infty} n}_{+\infty} \cdot \underbrace{\lim_{n\to\infty} n}_{+\infty} + \underbrace{3\lim_{n\to\infty} n}_{3\cdot\infty} - \lim_{n\to\infty} 1$$

nezávisí n → konšt. postupnosť „1"

$$= +\infty$$

Pr. 2: $$\lim_{n\to\infty}\left[(-2)^n + 4n^4 - 2n\right] = \underbrace{\lim_{n\to\infty}(-2)^n}_{\nexists} + \underbrace{4\lim_{n\to\infty} n^4}_{+\infty} - \underbrace{2\lim_{n\to\infty} n}_{\infty}$$

↳ nemôžeme využiť vetu, lebo výraz napravo neexistuje
→ rovnako ani ak by tam ten výraz $(-2)^n$ nebol, potom by sme dostali neurčitý výraz $+\infty - \infty$, čo tiež nevieme povedať, čo je.

V takýchto prípadoch musíme na to ísť múdrejšie

(1) Finta → vyňatie dominantného členu (najvyššej mocniny)

Pr. 2⁺: $$\lim_{n\to\infty}\left[4n^4 - 2n\right] = \lim_{n\to\infty} n^4\left(4 - \frac{2}{n^3}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} n^4 \cdot \lim_{n\to\infty}\left(4 - \underbrace{\frac{2}{n^3}}_{=0}\right) = +\infty \cdot 4$$

$$= +\infty$$

↳ „Súťažia tu proti sebe n^4 vs. n → n^4 ide do nekonečna rýchlejšie, takže „vyhrá súboj" ($n^4 >> n$)

Poznámka: Veľmi vhodná finta pre limity v tvare podielu polynómov
→ O výsledku limity rozhoduje stupeň polynómu (viď. prednáška)

Pr. 3:

keď dosadíme dostaneme $\frac{+\infty}{+\infty}$ → neurčitý výraz

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n+5}{3n-10} = \lim_{n\to\infty}\frac{\cancel{n}(1+\frac{5}{n})}{\cancel{n}(3-\frac{10}{n})} = \lim_{n\to\infty}\frac{1+\overbrace{\frac{5}{n}}^{\to 0}}{3-\underbrace{\frac{10}{n}}_{\to 0}} = \frac{1}{3}$$

finta 1

Pr. 4:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^4-n^3+4n^2}{5n^5+n-1} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^4(2-\overbrace{\frac{1}{n}}^{\to 0}+\overbrace{\frac{4}{n^2}}^{\to 0})}{n^5(5+\underbrace{\frac{1}{n^4}}_{\to 0}-\underbrace{\frac{1}{n^5}}_{\to 0})}$$

finta 1

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\frac{(2-\overbrace{\frac{1}{n}}^{\to 0}+\overbrace{\frac{4}{n^2}}^{\to 0})}{(5+\underbrace{\frac{1}{n^4}}_{\to 0}-\underbrace{\frac{1}{n^5}}_{\to 0})} = \frac{2}{5}\cdot\frac{1}{\infty} = 0$$

↳ Skutočne to bude 0 → lebo menovateľ rastie rýchlejšie ako čitateľ $n^5 >> n^4$ → rozhoduje mocnina

Pr. 5

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)^3-n(n+2)}{(n^2+3)(3n-2)} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^3+6n^2+12n+8-n^2-2n}{3n^3-2n^2+9n-6}$$

$(a\pm b)^3 = (a\pm b)(a\pm b)(a\pm b)$
$= a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$
$(a+b)(c+d) = ac+ad+bc+bd$
a tiež $(a\pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$

spojíme členy

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{n^3+5n^2+10n+8}{3n^3-2n^2+9n-6}$$

Finta 1

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\cancel{n^3}(1+\overbrace{\frac{5}{n}}^{\to 0}+\overbrace{\frac{10}{n^2}}^{\to 0}+\overbrace{\frac{8}{n^3}}^{\to 0})}{\cancel{n^3}(3-\underbrace{\frac{2}{n}}_{0}+\underbrace{\frac{9}{n^2}}_{0}-\underbrace{\frac{6}{n^3}}_{0})} = \underline{\underline{\frac{1}{3}}}$$

Pr. 6:

finta 1

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+4}}{n+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2(1+\frac{4}{n^2})}}{n(1+\frac{1}{n})} = \lim_{n\to\infty}\frac{\cancel{n}\sqrt{1+\overbrace{\frac{4}{n^2}}^{\to 0}}}{\cancel{n}(1+\underbrace{\frac{1}{n}}_{0})} = \underline{\underline{1}}$$

$$\boxed{\text{POZOR! } \sqrt{a+b} \neq \sqrt{a}+\sqrt{b}}$$

1) Finta → vyňatie členu s najväčším ~~mocnitelom~~ základom (dominantný člen)

Pr. 7:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2\cdot 5^{n+1} + 2^n}{7\cdot 4^n + 5^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{5^{n+1}\left(2 + \frac{2^n}{5^{n+1}}\right)}{5^n\left(7\cdot \frac{4^n}{5^n} + 1\right)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} 5\cdot \frac{\left(2 + \frac{1}{5}\overbrace{\left(\frac{2}{5}\right)^n}^{\to 0}\right)}{\left(7\cdot \underbrace{\left(\frac{4}{5}\right)^n}_{0} + 1\right)}$$

∴ Využijeme $\lim_{n\to\infty} a^n = 0$ pre $a\in(-1,$

$$= \underline{\underline{10}}$$

Poznámka: Táto finta je vhodná pre členy geometrickej postupnosti

Pr. 8:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{2n} + \left(\frac{7}{4}\right)^{n+1}}{\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{9}{4}\right)^{n+1}} =$$

∴ $\left(\frac{3}{2}\right)^{2n} = \left(\left(\frac{3}{2}\right)^2\right)^n = \left(\frac{9}{4}\right)^n$

$$= \lim_{n\to} \frac{\left(\frac{9}{4}\right)^n + \left(\frac{7}{4}\right)^{n+1}}{\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{9}{4}\right)^{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{9}{4}\right)^n\left(1 + \frac{\left(\frac{7}{4}\right)^{n+1}}{\left(\frac{9}{4}\right)^n}\right)}{\left(\frac{9}{4}\right)^{n+1}\left(\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}}{\left(\frac{9}{4}\right)^{n+1}} - 1\right)}$$

najväčšie je $\frac{9}{4}$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{9}{4}} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{\left(1 + \overbrace{\frac{\left(\frac{7}{4}\right)^{n+1}}{\left(\frac{9}{4}\right)^n}}^{\to 0}\right)}{\left(\underbrace{\left(\frac{\frac{3}{2}}{\frac{9}{4}}\right)^{n+1}}_{\to 0} - 1\right)} = \underline{\underline{-\frac{4}{9}}}$$

tu možno ešte viac napísať