Sústavy rovníc:

=> zmienka bola už na cvičení 1, teraz však podrobne (zíde sa nám pri hľadaní extrémov viacerých premenných)

Pr. 1 Riešme sústavy rovníc:

I. $7x - 3y = 15$

II. $5x + 6y = 27$

- Existuje množstvo spôsobov ako túto sústavu riešiť:

(A) Metóda dosadzovacia

– z jednej rovnice vyjadríme neznámu a dosadíme dosadíme do druhej

z I.) $x = \frac{15+3y}{7}$

II.) $5 \cdot \frac{15+3y}{7} + 6y = 27 \quad / \cdot 7$ (už máme len jednu rovnicu o jednej neznámej)

$$5 \cdot (15+3y) + 42y = 189$$
$$75 + 15y + 42y = 189$$
$$75 + 57y = 189$$
$$57y = 114$$
$$y = 2$$

Výsledok dosadíme do rovnice 1. (vyjadreného x)

$$x = \frac{15 + 3 \cdot 2}{7} = 3$$

Riešenie je [3, 2] (overíme dosadením – skúškou správnosti)

↳ Vhodná metóda ak máme člen, ktorý neobsahuje zložité zlomky a ak sa premenná dá rovno vyjadriť, tiež pre väčší počet premenných.

(B) Metóda sčítacia

– Rovnice vhodne vynásobíme podľa premenná tak, aby nám zostala rovnica s 1 neznámou.

I) $7x - 3y = 15 \quad / \cdot 2$

II) $5x + 6y = 27 \quad \swarrow +$

$$14x - \cancel{6y} = 30$$
$$5x + \cancel{6y} = 27 \quad > +$$
$$19x = 57$$
$$\underline{x = 3}$$

Dosadíme do ľubovoľnej rovnice

I) $7 \cdot 3 - 3y = 15$

$$21 - 3y = 15$$
$$-3y = -6$$
$$\underline{y = 2}$$

$\Rightarrow P = [3, 2]$

Metóda je vhodná najmä pre sústavu 2 rovníc o 2 neznámych.

(C) Porovnávacia: z oboch rovníc vyjadríme tú istú neznámu a dáme do rovnosti

Napr. z oboch rovníc x:

$$\left.\begin{aligned} \text{I)}\quad x &= \frac{15+3y}{7} \\ \text{II)}\quad x &= \frac{27-6y}{5} \end{aligned}\right\rangle =$$

$$\frac{15+3y}{7} = \frac{27-6y}{5} \qquad / \cdot 35$$

$$5 \cdot (15+3y) = 7 \cdot (27-6y)$$

$$75 + 15y = 189 - 42y$$

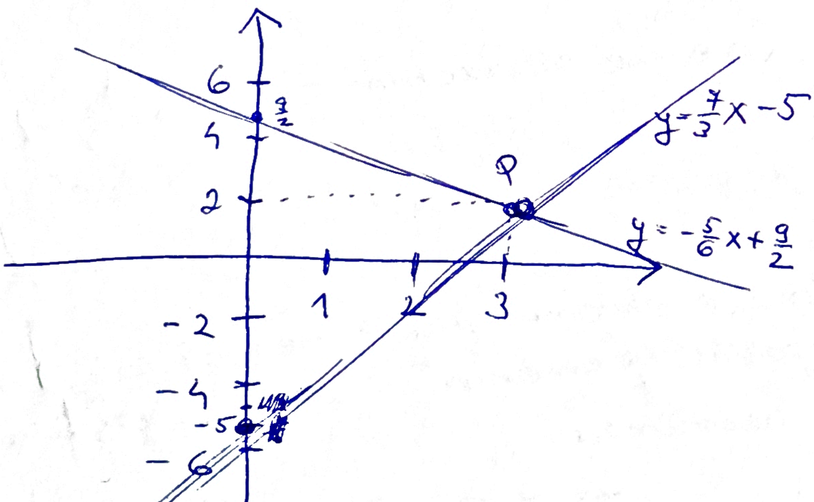
$$57y = 114$$

$$y = 2$$ $\Rightarrow$ a potom znova dosadíme a dopočítame x

(D) Grafická: – Obe rovnice vyjadríme ako fcie $f(x)=y$ a načrtneme graf, potom priesečník udáva riešenie

$$\text{I)}\quad y = \frac{7x-15}{3} = \frac{7}{3}x - 5$$

$$\text{II)}\quad y = \frac{5x-27}{-6} = -\frac{5}{6}x + \frac{9}{2}$$



Poznámka:
- Rovnaké metódy používame pre rovnice o viacerých neznámych, kde interpretácia môže byť zložitejšia
- Ak riešime nerovnice, tak graficky to znamená napr. že hľadáme prienik oblastí (viď. cvičenie 1)
- Niekedy môže byť riešení aj nekonečne veľa (priamky splývajú) alebo žiadne (priamky sú rovnobežné, ale nie totožné)

Čo ak nemáme sústavu lineárnych rovníc?

Pr. 2

I) $x+2y=5 \longrightarrow$ priamka

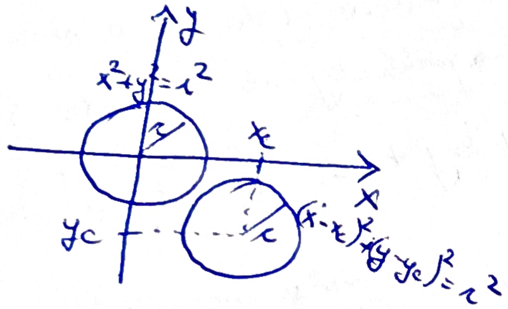
II) $x^2+y^2=25 \longrightarrow$ kružnica s $r=5$ a $S=[0,0]$

Obecne má rovnica kružnice tvar:

$$(x-x_c)^2+(y-y_c)^2=r^2$$; kde $r>0$ je polomer kružnice

$S=[x_c,y_c]$ sú súradnice stredu

↳ $\boxed{\text{Tomuto typu rovníc hovoríme, že implicitná rovnica/fcia.}}$



Je nevhodné z druhej rovnice vyjadrovať neznámu, lebo budeme mať výraz s odmocninou. Preto vyjadríme z prvej.

I) $x=5-2y$) dosadíme do II

II) $(5-2y)^2+y^2=25$

$\cancel{25}-20y+4y^2+y^2=\cancel{25}$

$5y^2-20y=0$

$y(5y-20)=0$

$y=0$

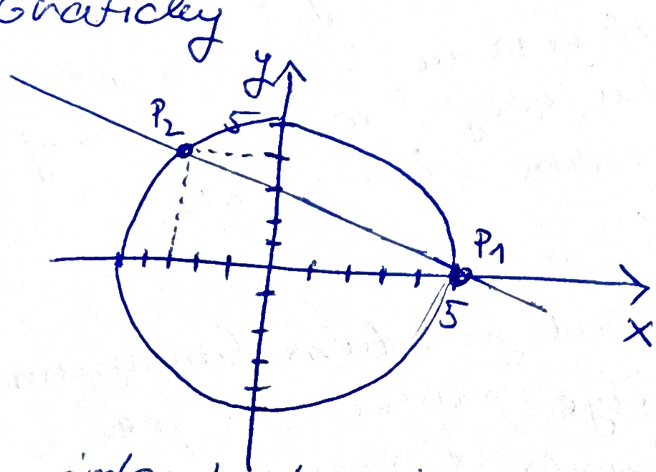
$y=4$

$x_1=5-2\cdot 0=5$

$x_2=5-2\cdot 4=-3$

Riešenia sú dve: $P_1=[0,5]$ a $P_2=[-3,4]$

Graficky



• Bonus: Ako sa zmení riešenie ak napr. zmeníme

$x+2y>5$

$x^2+y^2\leq 25$

↳ Výsledkom bude množina, ktorá bude kompaktná (uzavretá a ohraničená)

↳ NABUDÚCE

Poznámka: Ani tu riešenie nemusí existovať, alebo mať len jedno.

Funkcie viacerých premenných:

Doteraz $y = f(x)$ ... Fcie jednej premennej (zobrazovanie v rovine xy)

Teraz $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ... fcie n premenných

Ak napríklad $n = 2$ $f(x,y) = z$ → Môžeme zobraziť ako množinu bodov v 3-rozmer. priestore (plochy v priestore)

→ príklady na tabuli

Napríklad rovnica roviny $z = ax + by + c$ alebo rôzne iné krivky...

Geogebra + Contour plot

Parciálne derivácie:

Opäť ako v prípade jednej premennej sa môžeme pozrieť ako sa naša funkcia mení pri posúvaní sa pozdĺž osi x a osi y. Táto zmena je popísaná parciálnymi deriváciami

$\partial_x = \frac{\partial}{\partial x}$ → Ako sa fcia mení v smere osi x

$\partial_y = \frac{\partial}{\partial y}$ → -//- osi y

Pri parciálnom derivovaní ponechávame všetky premenné okrem tej podľa ktorej sa derivuje ako konštanty.

Body, kde sú všetky parciálne ~~de~~derivácie nulové nazývame stacionárne body (ako pri jednej premennej) → môžu byť extrémy, sedlové body,...

Poznámka: Aj v prípade fcií viacerých premenných môžeme zostrojiť tzv. dotyčnicovú rovinu, ktorá sa dotýka v jednom bode grafu našej fcie. Fcie jednej premennej sú akoby „rezom" tohto prípadu.

↳ Nebudeme robiť

Poznámka: To, či daný stacionárny bod je extrém (minimum alebo maximum) sa určuje podobne ako pre jednu premennú zo znamienka 2. derivácie (Hessova matica) → Nebudeme robiť

Pr. 3) Určte parciálne derivácie a stacionárne body.

$F(x,y) = x^2 + 3xy + y^2$

$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + 3y$

$\frac{\partial f}{\partial y} = 3x + 2y$

Podmienka na stacionárne body

$\frac{\partial f}{\partial x} = 0 = 2x + 3y \quad / \cdot (-2)$

$\frac{\partial f}{\partial y} = 0 = 3x + 2y \quad / \cdot 3$

Riešime napr. sčítacou metódou

$0 = 5x \qquad 0 = 2 \cdot 0 + 3y$

$x = 0 \qquad 3y = 0$

$y = 0$

Jediný stacionárny bod je $[0,0]$

Klasifikácia prostredníctvom Hessiánu → BONUS < SEDLO / EXTRÉM

Pr. 4) $F(x,y) = 2x^3 + 9xy^2 + 15x^2 + 27y^2$

$\frac{\partial f}{\partial x} = 6x^2 + 9y^2 + 30x = 0$ → Rovnosť s nulou súvisí s podmienkou na stacionárne body

$\frac{\partial f}{\partial y} = 18xy + 54y = 0$

z druhej: II) $y(18x + 54) = 0$

$y = 0$ alebo $18x + 54 = 0$

$x = -3$

- Pre $y = 0$ do I) rovnice $6x^2 + 9 \cdot 0^2 + 30x = 0$

$6x^2 + 30x = 0$

$x(6x + 30) = 0$

$x = 0$ alebo $6x + 30 = 0$

$6x = -30$

$x = -5$

Teda stac. body sú: $[-5,0], [0,0]$

Pre $x = -3$ do I) rovnice $6 \cdot (-3)^2 + 9y^2 + 30 \cdot (-3) = 0$

$9y^2 = 36$

$y = \pm 2$

Teda máme $[-3,2], [3,2]$

Spolu 4 body

Pr. 5: $f(x,y) = x^2 - x - xy - y^3 + y$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - 1 - y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -x - 3y^2 + 1$$

Stacionárne body:

vyjadríme si z II x

$$\begin{aligned} &I)\ 2x - 1 - y = 0 \\ &II)\ -x - 3y^2 + 1 = 0 \end{aligned} \rightarrow \begin{aligned} &I)\ 2x - y = 1 \\ &II\ -x - 3y^2 = -1 \Rightarrow x = 1 - 3y^2 \end{aligned}$$

Dosadením do I: $2(1-3y^2) - y = 1$

$$2 - 6y^2 - y = 1$$

$$-6y^2 - y + 1 = 0$$

$$6y^2 + y - 1 = 0$$

$$D = 1 + 4 \cdot 6 \cdot 1 = 25$$

$$y_{1,2} = \frac{-1 \pm 5}{12} \begin{cases} \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Pre $y = \frac{1}{3}$ $\quad x = 1 - 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 1 - 3 \cdot \frac{1}{9} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

Pre $y = -\frac{1}{2}$ $\quad x = 1 - 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$

Stacionárne body sú: $\left[\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right], \left[\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}\right]$

Bonus: Skúste si vypočítať aj príklad, ktorý vedie na sústavu 3 rovníc pre funkciu 3 premenných

$$f(x,y,z) = xy - 2xz + 3yz + 7x - 15y + 3z$$

(Posledný príklad z DÚ 15)

Výsledok → jediný stacionárny bod $[3, 1, 4]$

Ďalšie príklady, ktoré nevedú na lineárnu sústavu rovníc.

__Pr. 6__ $F(x,y) = y + \frac{1}{y} - 2\ln^2 x$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2\cdot 2\ln x \cdot \frac{1}{x} = \frac{4\ln x}{x}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 1 - \frac{1}{y^2}$$

Stacionárne body: $\frac{4\ln x}{x} = 0$ a $1 - \frac{1}{y^2} = 0$

$x = 1$

$1 = \frac{1}{y^2}$

$y = \pm 1$

$[1,1]$ a $[-1,0]$ sú stacionárne body.

__Pr. 7__ $F(x,y) = (2y + xy)e^{\frac{x-y^2}{2}}$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = ye^{\frac{x-y^2}{2}} + (2y+xy)e^{\frac{x-y^2}{2}}\cdot\frac{1}{2} = e^{\frac{x-y^2}{2}}\left(2y + \frac{1}{2}xy\right)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = (2+x)e^{\frac{x-y^2}{2}} + (2y+xy)e^{\frac{x-y^2}{2}}\cdot(-2y)$$

$$= e^{\frac{x-y^2}{2}}(2 + x - 2y^2 - xy^2)$$

$$= e^{\frac{x-y^2}{2}}(2 + x - y^2(2+x)) = e^{\frac{x-y^2}{2}}(1-y^2)(2+x)$$

Stacionárne body:

I) $e^{\frac{x-y^2}{2}}\left(2y + \frac{1}{2}xy\right) = 0$

II) $e^{\frac{x-y^2}{2}}(1-y^2)(2+x) = 0$

$2y + \frac{1}{2}xy = 0 \quad /\cdot 2$

$y(4+x) = 0$

$y = 0$
$x = -4$

Tieto body dosadíme do rovnice II):

Pre $x = -4$

II) $(1-y^2)(2-4) = 0$

$$-2(1-y^2) = 0$$

$$1-y^2 = 0$$

$$y^2 = 1$$

$$y = \pm 1$$

Pre $y = 0$

II) $(1-0^2)(2+x) = 0$

$$2+x = 0$$

$$x = -2$$

Stacionárne body sú: $[-4,1],[-4,-1],[-2,0]$