Priebeh funkcie:

– Cieľom je urobiť podrobný rozbor vlastností funkcie zo zadaného predpisu tak, aby sme túto funkciu mohli čo najdôveryhodnejšie načrtnúť. Na to potrebujeme poznať:

1) Definičný obor (prípadne obor hodnôt, často sa však udá na záver)
2) Sudosť/lichosť
3) Kladnosť/zápornosť
4) Priesečníky s osami
5) Limity v krajných bodoch D_f
6) Derivácia funkcie a stacionárne body (vynimočné) (+extrémy a monotónia)
7) Asymptoty
8) Konvexita, konkávnosť (z druhej derivácie) + inflexné body
9) Graf funkcie

Pr. 1) Vyšetrite priebeh fcie:

$$f(x) = e^{1-x}(1-2x)$$

1) $\boxed{D_f = \mathbb{R}}$ (žiadny menovateľ, odmocnina ani logaritmus)

2) Parita:
- D_f je symetrický ✓
- $f(-x) = e^{1-(-x)}(1-2\cdot(-x)) = e^{1+x}(1+2x) \neq f(x) \neq -f(x)$

$\Rightarrow$ Fcia nie je ani párna ani nepárna (ani sudá, ani lichá)

3) Kladnosť/zápornosť: $e^{1-x} > 0$, preto rozhoduje o znamienku člen $(1-2x)$.

Nulové body: $e^{1-x}(1-2x) = 0 \quad / : e^{1-x}$

$$1-2x = 0$$
$$x = \frac{1}{2}$$

$(-\infty, \frac{1}{2})$ $\quad$ $(\frac{1}{2}, \infty)$

$\oplus$ $\quad \frac{1}{2} \quad$ $\ominus$

$\longrightarrow$ $\boxed{\begin{array}{l}\text{Fcia je kladná na } (-\infty, \frac{1}{2}) \\ \text{Fcia je záporná na } (\frac{1}{2}, \infty)\end{array}}$

4) Priesečníky:

$P_x: \quad y=0 \quad \Rightarrow \quad 0 = e^{1-x}(1-2x)$

$$x = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{P_x = [\tfrac{1}{2}, 0]}$$

$P_y: \quad x=0 \quad \Rightarrow \quad y = e^{1-0}(1-2\cdot 0) = e \quad \Rightarrow \quad \boxed{P_y = [0, e]}$

5) Limity v krajných bodoch D_f: → máme $\pm\infty$.

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}} e^{1-x}(1-2x) \overset{\text{prepis}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{1-2x}{e^{x-1}} \overset{L.H}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{-2}{e^{x-1}} = \frac{-2}{+\infty} = \boxed{0}$$

limita typu $0\cdot(-\infty)$ — typ $\frac{-\infty}{+\infty}$

Vyšlo číslo → má vodorovnú asymptotu

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty}} e^{1-x}(1-2x) = +\infty\cdot(+\infty) = \boxed{+\infty}$$

→ Nemá vodorovnú asymptotu v $-\infty$.

6) Derivácia

$$\boxed{f'(x)} = e^{1-x}(-1)(1-2x) + e^{1-x}\cdot(-2)$$

$$= e^{1-x}(-1+2x-2) = \boxed{e^{1-x}(2x-3)}$$

$D_{f'} = \mathbb{R}$ (žiadne body, kde derivácia neexistuje)

Stacionárne body: $f'(x) = 0$

$$e^{1-x}(2x-3) = 0$$

$$2x-3 = 0$$

$$x = \frac{3}{2}$$

Monotónia:

$\ominus \quad \frac{3}{2} \quad \oplus$

Fcia klesá na $(-\infty, \frac{3}{2})$

Fcia rastie na $(\frac{3}{2}, \infty)$.

Bod $\frac{3}{2}$ má v bode $x_0 = \frac{3}{2}$ lokálne minimum (zároveň aj globálne)

Hodnota v minime: $f(\frac{3}{2}) = e^{1-\frac{3}{2}}(1-2\cdot\frac{3}{2}) = e^{-\frac{1}{2}}\cdot(-2)$

$$= -\frac{2}{\sqrt{e}} \approx -1{,}2$$

7) Asymptoty: Už sme zistili, že Fcia má v bode ~~x~~ $+\infty$ vodorovnú asymptotu $\boxed{y=0}$

v $-\infty$: Skúsme nájsť smernicu:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{e^{1-x}(1-2x)}{x} \overset{\frac{+\infty}{-\infty}}{\underset{L.H.}{=}} \lim_{x\to-\infty}\frac{f'(x)}{1} = \lim_{x\to-\infty}\frac{e^{1-x}(2x-3)}{1} = +\infty\cdot-\infty = -\infty$$

Nemá ani šikmú asymptotu → Fcia v $-\infty$ diverguje a nemá asymptotu.

8) Druhá derivácia: $\boxed{f''(x)} = e^{1-x}(2x-3)\cdot(-1) + e^{1-x}\cdot 2$

$$= e^{1-x}(-2x+3+2) = \boxed{e^{1-x}(5-2x)}$$

Môžeme overiť, že bod $\frac{3}{2}$ je minimum:

$$f''\left(\tfrac{3}{2}\right) = e^{1-\frac{3}{2}}\left(5-2\cdot\tfrac{3}{2}\right) = \frac{2}{\sqrt{e}} > 0 \Rightarrow \text{je to glob. minimum.}$$

Inflexný bod

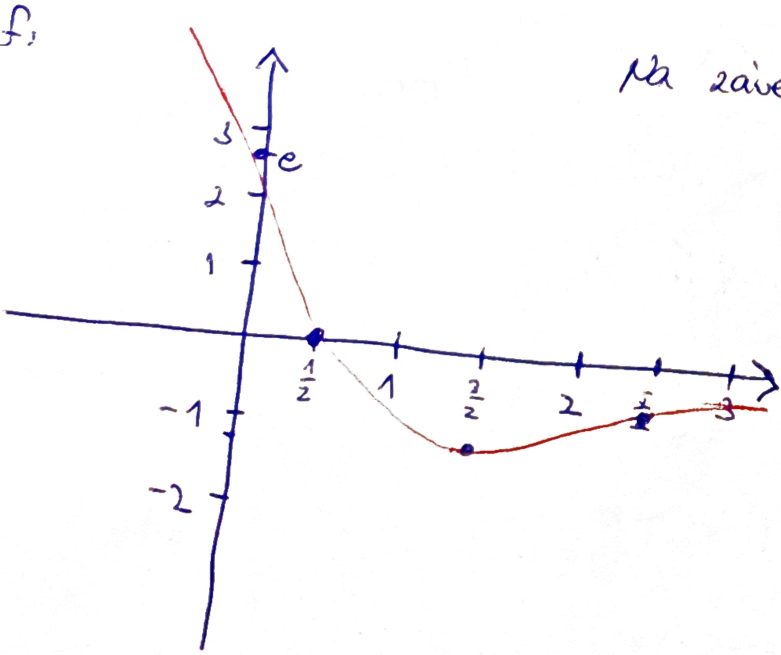
$$f''(x) = 0$$
$$e^{1-x}(5-2x) = 0$$
$$5-2x = 0$$
$$x = \frac{5}{2}$$

$+$ $\quad$ $-$

$\frac{5}{2}$

Fcia je konvexná na $(-\infty, \frac{5}{2})$
Fcia je konkávna na $(\frac{5}{2}, +\infty)$

Graf:



Na záver vidíme, že $\boxed{H_f = \left(-\frac{2}{\sqrt{e}}, \infty\right)}$

Na záver je dobré skontrolovať, že skutočne obrázok zodpovedá tomu, ako sme to nakreslili a nedošli sme k sporu

Pr 2 Vyšetrite priebeh fcie:

$$f(x) = \sqrt{x^2+1} + x - 1$$

1) D_f: $x^2+1 \geq 0$

$x^2 \geq -1$ (to platí vždy) $\Rightarrow$ $\boxed{D_f = \mathbb{R}}$

2) Parita:
- D_f je symetrický ✓
- $f(-x) = \sqrt{(-x)^2+1} + (-x) - 1 = \sqrt{x^2+1} - x - 1 \neq -f(x) \neq f(x)$

↳ **Fcia není ani lichá ani sudá**

3) Kladnosť/záporność:

Nulové body $\rightarrow$ $0 = \sqrt{x^2+1} + x - 1$

$1 - x = \sqrt{x^2+1} \quad / ()^2$ ↗ Robíme neekvivalentné úpravy, bude potrebné overiť výsledok skúškou

$(1-x)^2 = x^2 + 1$

$\cancel{1} - 2x + \cancel{x^2} = \cancel{x^2} + \cancel{1}$

$-2x = 0$

$x = 0 \longrightarrow$ Dosadením zistíme, že sedí

$(-\infty, 0)$ $(0, \infty)$

$-$ 0 $+$

Fcia je záporná na intervale $(-\infty, 0)$
Fcia je kladná na intervale $(0, \infty)$.

4) Priesečníky:

P_x: $y = 0 \Rightarrow 0 = \sqrt{x^2+1} + x - 1$: riešenie vyššie

$x = 0 \Rightarrow \boxed{P_x = [0,0]} \rightarrow$ zároveň aj priesečník s osou y

$\boxed{P_y = [0,0]}$

5) Limity v krajných bodoch D_f:

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2+1} + x - 1\right) = +\infty + \infty - 1 = +\infty$$

↗ nemáme vodorovnú asymptotu v $+\infty$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+1}+x-1\right) \overset{\text{BAL}}{=} \lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+1}+x - \lim_{x\to-\infty} 1$$

finta 3

$$= \lim_{x\to-\infty}\left(\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)\frac{\sqrt{x^2+1}-x}{\sqrt{x^2+1}-x}\right) - 1$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{\cancel{x^2}+1-\cancel{x^2}}{\sqrt{x^2+1}-x} - 1 = \frac{1}{\infty} - 1 = -1$$

V $-\infty$ máme vodorovnú asymptotu $\boxed{y=-1}$

c) Derivácia

$$f'(x) = \frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2+1}} + 1$$

$$= \frac{x+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}$$

oba tvary sú ekvivalentné

$D_{f'} = \mathbb{R}$ (neexistujú žiadne body, kde derivácia neexistuje)

Stacionárne body:

$$0 = f'(x)$$

$$0 = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} + 1$$

$$-1 = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$-\sqrt{x^2+1} = x \qquad /()^2$$

$$\cancel{x^2}+1 = \cancel{x^2}$$

$$1 = 0$$

$\Rightarrow$ nenašli sme riešenie $\Rightarrow$ fcia nemá žiadne stacionárne body $\boxed{\rightarrow \text{Nemá žiaden extrém}}$, teda fcia je rýdzomonotónna

Monotónia,

$$f'(x) = \frac{x+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}$$

menovateľ ≥ 0, stačí riešiť čitateľ

$$x+\sqrt{x^2+1} \gtrless 0$$

(lebo nech je x ľubovoľné, vždy bude člen $\sqrt{x^2+1}$ väčší ako x)

Môžno overiť dosadením ľub. čísla napr. $-1, 1$.

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{Fcia je rastúca na } \mathbb{R}}$

7) Asymptoty: v $-\infty$: $\boxed{y=-1}$

v $+\infty$: Skúsme šikmú asymptotu:

$$k = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}+x-1}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\cancel{x}\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1-\frac{1}{x}\right)}{\cancel{x}} = \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1-\frac{1}{x}\right)$$

finta 1

$k = 2$ → máme šikmú asymptotu

$$q = \lim_{x\to+\infty}(f(x)-kx) = \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}+x-1-2x\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x-1\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right) - \lim_{x\to+\infty} 1 \quad \cdot\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}+x}$$

finta 3

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x} - 1 = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x} - 1 = -1$$

V $+\infty$ máme asymptotu $\boxed{y=2x-1}$

8) Druhá derivácia:

$$f''(x) = \frac{\sqrt{x^2+1} - x\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} = \frac{\sqrt{x^2+1}-\frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}$$

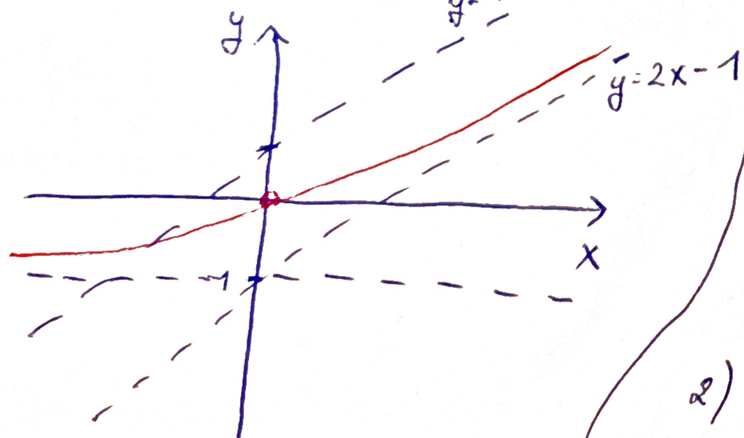
$$= \frac{x^2+1-x^2}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}$$

Inflexné body $f''(x)=0$ → to nie je splnené nikdy, lebo menovateľ > 0

↳ žiaden inflexný bod

$\Rightarrow f''(x) > 0 \Rightarrow$ $\boxed{\text{fcia je konvexná na } \mathbb{R}.}$

10) Graf



Ďalšie príklady na priebeh fcie?

1) polynómy (obľúbené pre priebežný test - vid. minulý rok)

→ Dobrovoľné cvičenie / prémiovka

2) rac. lomené fcie

→ ťahať, moje stránky → preklik na J. Jarošá :)