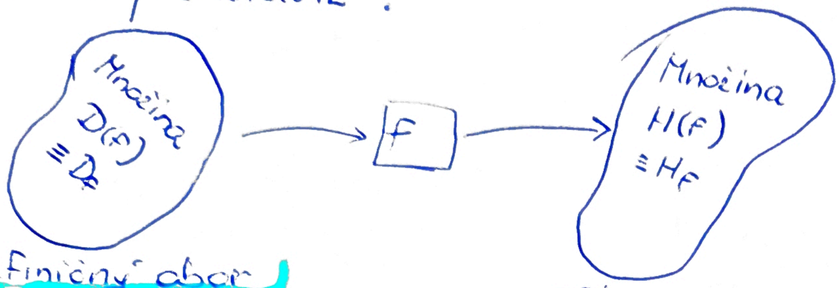
Rýchle opakovanie teórie z prednášky:

Funkcia – predpis, ktorý každej hodnote $x \in D(f)$ priradí (najviac) (práve) jednu hodnotu $y \in H(f)$ $y=f(x)$.

Ako si to predstaviť?



Rôzne spôsoby zápisu:

f: $y = f(x)$

napr. $y = 2x + 3$

$f(x) = 2x + 3$

$y(x) = 2x + 3$

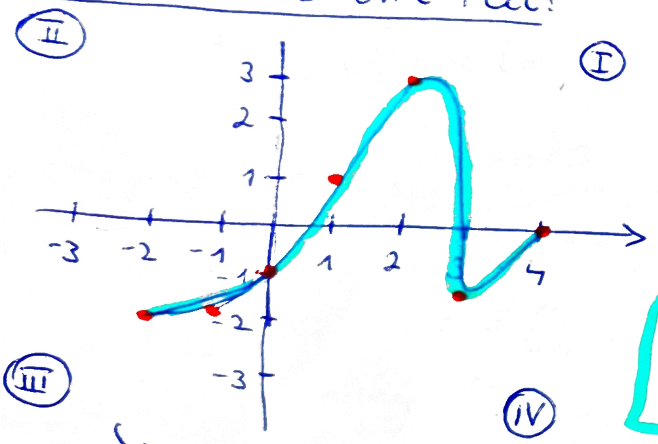
Definičný obor – „Všetky prípustné nezávislé premenné x"

Obor hodnôt „Všetky prípustné závislé y"

D_f aj H_f môžu byť napr. $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}-\{0\}, \{2,3,4\}, \langle 2,3\rangle \cup \{0\}$...

Pozn.: D_f pre rôzne fcie budeme hlbšie vyšetrovať v nasledujúcich cvičeniach.

Grafické znázornenie fcií:



I II III IV – kvadranty

→ Ak je to napríklad $f: \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$
↳ izolované body

→ Väčšinou však je $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ → krivka

Vyjadrenie fcií:

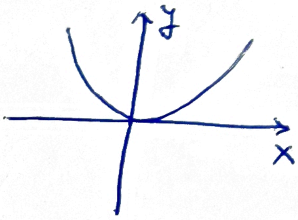
① Predpisom: $y = 2x^2 + 7x$

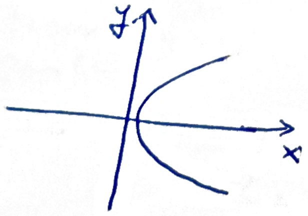
② Tabuľkou hodnôt

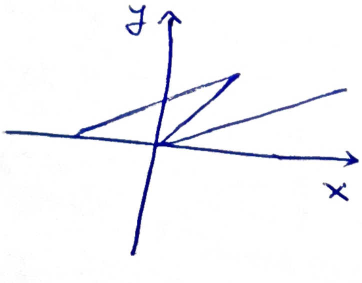
x	-2	-1	0	1	2	3	4
y	-2	-2	-1	1	3	-1	0

↳ pre $x=-3$ nie je definovaná
⇒ $\{-3\} \notin D_f$

Čo je a čo nie je fcia?







Priesečníky s osou x: $y=0$

Priesečníky s osou y: $x=0$

Lineárne fcie:

Všeobecný predpis $\boxed{f(x) = ax + b}$

a ... smernica
↳ udáva smer a sklon

b ... absolútny člen

$D_f = R$

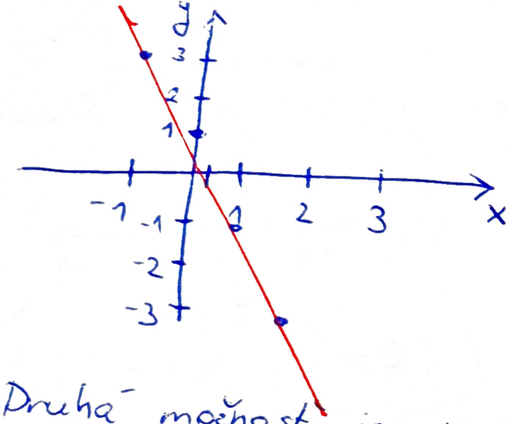
Grafom je priamka napr.

Pr. 1: Nakreslite graf fcie $\boxed{y = 1-2x}$ → Možno prepísať ako $y = -2x+1$, aby sme dodržali poradie :)

- Prvý spôsob je použitie tabuľky:

x	-1	0	1	2	?
y	3	1	-1	-3	0

→ x si volíme sami
→ y spočítame
} stačia nám len 2 hodnoty (body)



Narysovať spravme pravítkom! a vyskúšať si ako sa to zmení ak:
- a = konšt., b mením
- a mením, b = konšt

- Druhá možnosť je využiť znalosti koeficientov a, b:

U nás $a = -2$ ⇒ klesajúca fcia, za každé $\Delta x = 1$ sa y zmení o $\Delta y = 2$

$b = 1$ ⇒ Bude na y-ovej osi prechádzať 1

Nájdime ešte priesečníky:

S osou y: $x = 0$ ⇒ $y = 1 - 2\cdot 0 = 1$ → to už sme vedeli

S osou x: $y = 0$ ⇒ $0 = 1 - 2x$ ⇒ $1 = 2x$ ⇒ $x = \frac{1}{2}$

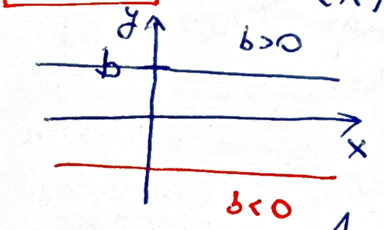
riešime rovnicu (ekvivalentné úpravy)

Takže: $P_x = [\frac{1}{2}, 0]$ a $P_y = [0, 1]$

Pozn. platí
$P_y = [0, b]$
$P_x = [-\frac{b}{a}, 0]$

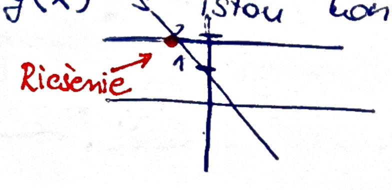
Špeciálne prípady:

$\boxed{a=0}$ ⇒ $f(x) = b$ → konštantná fcia

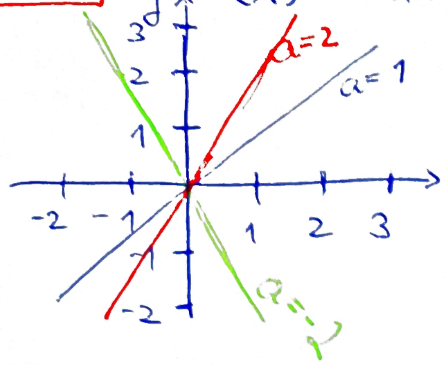


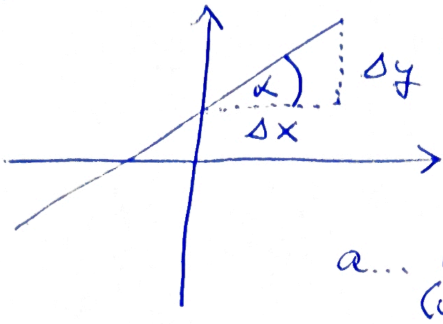
→ Riešiť rovnicu znamená nájsť priesečník fcie y(x) s istou konšt. hodnotou

napr. $1 - 2x = 2$



$\boxed{b=0}$ $f(x) = ax$ → priama úmera (prechádza vždy počiatkom $O=[0,0]$)





$$a = \operatorname{tg} \alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

a... má význam prírastku (úbytku) fcie ak x vzrastie o 1.

Pr. 2) Nájdite riešenie rovnice $\boxed{5x+1=6}$

Spôsob 1): Ekvivalentné úpravy:

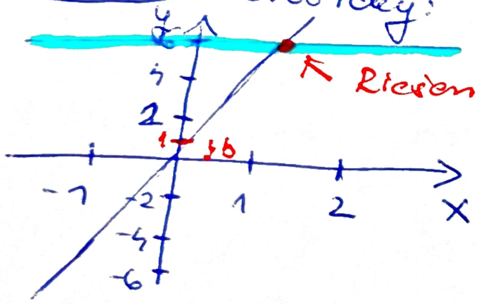
$5x+1=6 \quad /-1$

$5x=5 \quad /:5$

$x=1$

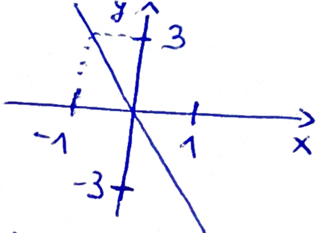
Spôsob 2: Graficky: $f(x) = 5x+1$ $\quad a=5$

$f(x) = 6$ $\quad b=1$



Skúška:

Dokážete zistiť predpis pre nakreslenú fcie?



(Riešenie $y=-3x$)

Pozn.: „Kontrola" správnosti napr. WolframAlpha, Desmos

Pr. 3*) Aká je rovnica priamky ak vieme, že prechádza bodmi $A=[3,7]$ $B=[1,-1]$. $\left(\begin{matrix} f(3)=7 \\ f(1)=-1 \end{matrix}\right)$

Rovnica priamky (lineárnej fcie je): $y = ax+b$

Dosadíme naše body: $\left.\begin{matrix} ① \; 7 = 3\cdot a + b \\ ② \; -1 = 1a + b \end{matrix}\right\}$ Sústava dvoch rovníc pre 2 neznáme a, b

Metódy riešenia ← Dosadzovacia → skúsme túto → z druhej rovnice vyjadríme a

Sčítacia

Porovnávacia

Grafická

$a = -b-1$ → $\boxed{a=4}$

Dosadením z ② do ①:

$7 = 3\cdot(-b-1)+b$

$7 = -3b-3+b$

$7 = -2b-3 \quad /+3$

$10 = -2b \quad /:(-2)$

$\boxed{b=-5}$

Takže riešenie je $y = 4x-5$

+ overenie (dosadíme)

Ako sa zmení riešenie ak budeme mať nerovnicu?

⇒ Výsledkom bude polrovina a to buď aj s bodmi, ktoré ležia na priamke (ak tam je aj rovnosť) alebo bez nich (ostrá nerovnosť).

Pr. 3 Najdite riešenie nerovnice $-3x + 2 < -1$

Spôsob 1: Úpravy: $-3x + 2 < -1 \quad /-2$

$$-3x < -3 \quad /:(-3) \rightarrow \text{POZOR!!}$$

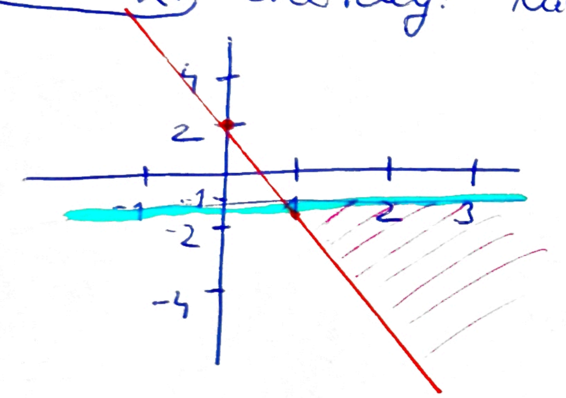
$$\underline{\underline{x > 1}}$$

$$x \in (1, \infty)$$

pri násobení alebo delení záporným číslom sa nerovnosť obracia!

Spôsob 2: Graficky: Nakreslime opäť $f(x) = -3x + 2$

$f(x) = -1$



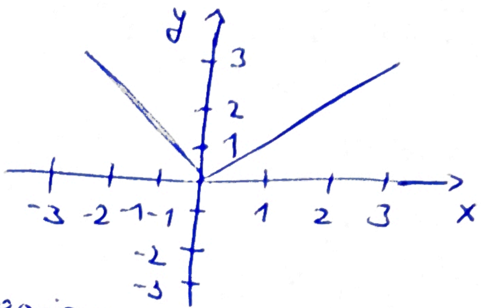
→ kde leží pod → všade ďalej od $x = 1$

⇒ $x \in (1, \infty)$

otvorený interval, lebo ostrá nerovnosť

Funkcie s absolútnou hodnotou:

Definícia $|x| \begin{cases} x & ; x \geq 0 \\ -x & ; x < 0 \end{cases}$

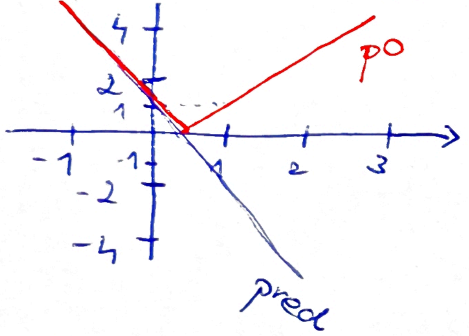


→ Fcia v absolútnej hodnote je vždy nezáporná.

Ak je celá fcia v absolútnej hodnote, môžeme ju vyrobiť tak, že všade kde je záporná ju „zrkadlovo preklopíme voči ose x". Napr. predošlý príklad.

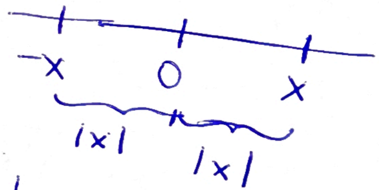
Pr. 4: Nakreslite graf fcie $f(x) = |-3x+2|$

- Opäť možno postupovať tabuľkou, my však vieme ako vyzerá naša fcia:



Pozn. 1: Priesečník s osou x zostane na rovnakom mieste

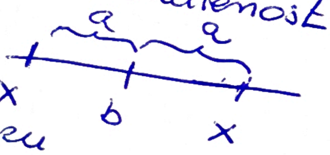
Pozn. 2: Absolútna hodnota $|x|$ udáva geometricky vzdialenosť x od nuly



Rovnice s absolútnou hodnotou:

$|x| = 1$ → Riešenie hneď $x = 1$, $x = -1$ $x \in \{-1, 1\}$

Rovnako $|x - b| = a$ vzdialenosť od b



Metóda nulových bodov:

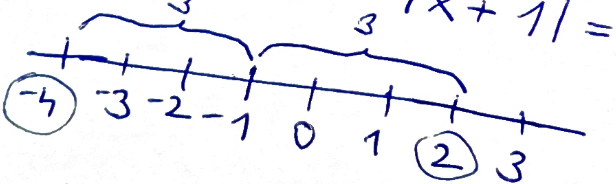
→ Pýtam sa, kedy je absolútna hodnota z výrazu rovná 0?

Pr. 5: Nájdite riešenie rovnice $|x+1| = 3$

Spôsob 1: Graficky:

$|x+1| = 3$

$|x-(-1)| = 3$

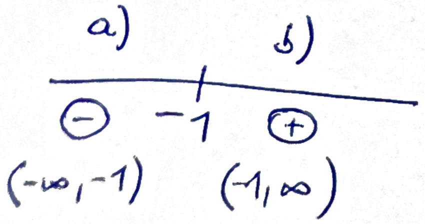


$\Rightarrow x = -4 \vee x = 2 \Rightarrow x \in \{-4, +2\}$

overenie dosadením

Spôsob 2: Metóda nulových bodov

$x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$



a) $-x - 1 = 3$

$-x = 4$

$\underline{x = -4 \in (-\infty, -1)}$

b) $x + 1 = 3$

$\underline{x = 2 \in (-1, \infty)}$

Pr 6.1 Nájdite riešenie rovnice $|3x+5| = 8$

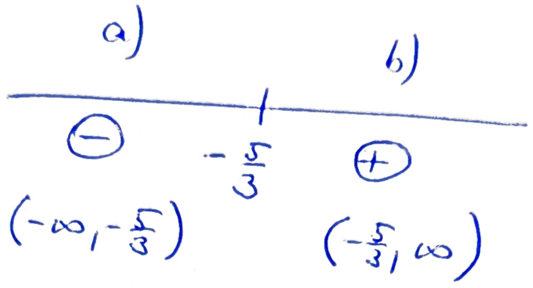
Pozor → Pri x nám stojí trojka → nemožno bezhlavo použiť grafickú metódu (nemáme tvar $|x-b|$)

Metóda nulových bodov:

$3x + 5 = 0 \quad / -5$

$3x = -5 \quad / : 3$

$x = -\frac{5}{3} \doteq$ ~~1,66~~ $-1{,}66$



a) $-3x - 5 = 8 \quad / +5$

$-3x = 13 \quad / : -3$

$x = -\frac{13}{3} \in (-\infty, -\frac{5}{3})$ → prvé riešenie $P_1 = 0 - \frac{13}{3}$

b) $3x + 5 = 8 \quad / -5$

$3x = 3 \quad / : 3$

$x = 1 \in (-\frac{5}{3}, \infty)$ → druhé riešenie $P_2 = 1$

Celkové riešenie $P = P_1 \cup P_2 = \{-\frac{13}{3}, 1\}$

↳ overenie dosadením

Kvadratické funkcie: všeobecný tvar

Všeobecný predpis $\boxed{f(x) = \underbrace{ax^2}_{\text{kvadratický člen}} + \underbrace{bx}_{\text{lineárny člen}} + c}$ → absolútny člen

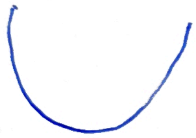
vrcholový tvar $\boxed{f(x) = (x - x_v)^2 + y_v}$

$D_f = \mathbb{R}$

Grafom kvadratickej fcie je parabola. $(a \neq 0)$ → inak lineárna

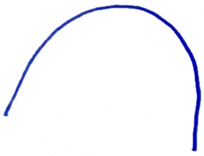
Význam koeficientov:

$a > 0$



konvexná
(má minimum)

$a < 0$



konkávna
(má maximum)

Pozn.:

„Do konkávnej kávu nenaleješ

Pozn.:

Vrchol je vždy extrém fcie.

b... posúva fcii viac „doprava/doľava" → lepšie vidieť pri vrcholovom tvare

c... posúva fcii „hore/dole"

Ⓐ Ako nájsť priesečníky s osami?

Pr. 7: $f(x) = x^2 - 2x - 8$

Priesečník s osou y: (jednoduchší) $x = 0 \Rightarrow y = 0^2 - 2 \cdot 0 - 8$

$y = -8$

$\Rightarrow P_y = [0, -8]$ (Všeobecne vždy $P_y = [0, c]$)

Priesečník s osou x: (riešime kvadratickú rovnicu) $y = 0$

$$x^2 - 2x - 8 = 0$$

Ako nájsť riešenie?

① Vzorce:

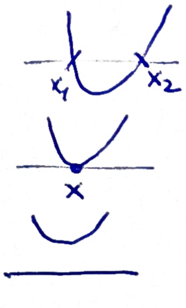
$$\boxed{\begin{aligned} D &= b^2 - 4ac \\ x_{1,2} &= \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} \end{aligned}}$$

$a > 0$:

$D > 0$ 2 riešeni

$D = 0$ 1 riešenie

$D < 0$ žiadne reálne rieš.



↳ Funguje vždy, ale môže byť prácne

Pre náš: $x^2 - 2x - 8 = 0$ $(a = 1,\ b = -2,\ c = -8)$

$$D = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-8) = 4 + 32 = 36 \rightarrow \text{Dva priesečníky}$$

$$x_{1,2} = \frac{+2 \pm \sqrt{36}}{2} \left\langle \begin{array}{l} + \quad \frac{2+6}{2} = 4 \\ \\ - \quad \frac{2-6}{2} = -2 \end{array} \right. \Rightarrow P_x = [4,0] \wedge [-2,0]$$

② Vietove vzorce

ak $a = 1$ $\Rightarrow$

(ak $a \neq 1$) $0 = (x - x_1)(x - x_2)$

$$\boxed{\begin{aligned} x_1 + x_2 &= -b \\ x_1 \cdot x_2 &= c \end{aligned}}$$

→ Je to rýchlejšie, ak je $a = 1$ → vtedy odporúčam (Najlepšie je vždy skúsiť toto, a ak neviem, potom diskriminant)

Pre náš: $x^2 - 2x - 8 = 0$

→ Hľadám také čísla, aby ich súčin bol -8. Skúsiť môžem napr. $-2, 4$ alebo $4, -2$. Ďalej viem, že ich súčet musí dať $+2$. → 2 týchto možností zostáva len $\boxed{4, -2.}$ Teda:

$$(x-4)(x+2) = 0 \quad \text{(kontrola roznásobením)}$$

$$x^2 - 4x + 2x - 8 = 0$$

$$x^2 - 2x - 8 = 0 \quad \text{(máme dobré korene)}$$

$$\Rightarrow P_x = [4,0] \wedge [-2,0]$$

Ⓑ Ako nájsť vrchol paraboly?

↳ Prepisom na vrcholový tvar

Pre náš: $y = x^2 - 2x - 8$ → chcem použiť vzorec $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$

→ Vydelím b dvojkou a doplním

$$y = (x^2 - 2x + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{dávam}}}{1}) - \underset{\substack{\uparrow \\ \text{vraciam}}}{1} - 8 = (x - \underset{\substack{\nearrow \\ x_v}}{1})^2 - \underset{\substack{\nearrow \\ y_v}}{9}$$

Vrchol: $V = [1, -9]$

Vo všeobecnosti:

$$ax^2+bx+c$$

$$a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)$$

$$a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}\right] = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}\right)\right]$$

$$= a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\boxed{b^2-4ac}}{4a^2}\right] \longrightarrow D$$

$$= a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{D}{4a}$$

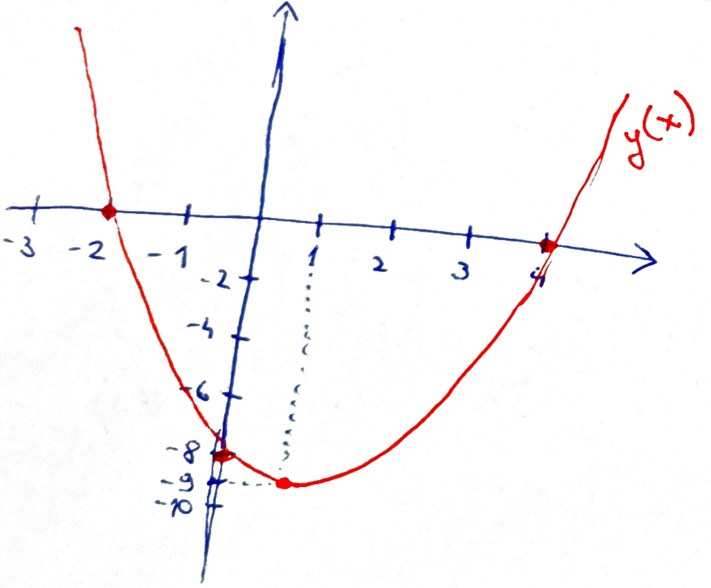
=> Súradnice vrcholu vzorček:

$$V=\left[-\frac{b}{2a}, -\frac{D}{4a}\right]$$

ⓒ Nakresliť graf:

Už máme všetko potrebné (priesečníky, vrchol a vieme, že je $a>0$)

$y=x^2-2x-8$



$V=[1,-9]$

$P_y=[0,-8]$

~~$P_x=[0,-2]\wedge[0,4]$~~

$P_x=[4,0]\wedge[-2,0]$

Pr-8: Nájdite priesečníky, vrchol a načrtnite graf

$f(x) = -2x^2 - 16x - 14$

Priesečník s osou y: $x=0 \Rightarrow y = -2\cdot0^2 - 16\cdot0 - 14 = -14$

$$\boxed{P_y = [0,-14]}$$

Priesečník s osou x: $y=0 \Rightarrow 0 = -2x^2 - 16x - 14$ (ak sa dá celá rovnica deliť môžeme)

Použijeme vzorce: $a=-2$, $b=-16$, $c=-14$

$$D = b^2 - 4ac$$
$$= (-16)^2 - 4\cdot(-2)\cdot(-14) = 256 - 112 = 144$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{16 \pm \sqrt{144}}{-4} \quad \begin{cases} \frac{16+12}{-4} = -7 \\ \frac{16-12}{-4} = -1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{P_x = [-7,0] \wedge [-1,0]}$$

Vrchol: $y = -2x^2 - 16x - 14$

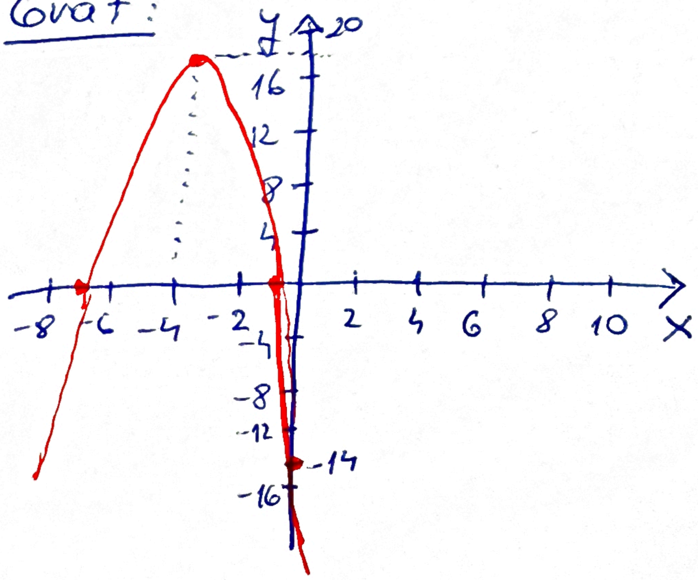
$$= -2(x^2 + 8x + 7) = -2[(x^2 + 8x + 16) \overbrace{-16+7}^{-9}]$$
$$= -2(x+4)^2 + 18$$

$$\Rightarrow \boxed{V = [-4,18]}$$

Alebo vzorček:

$$V = \left[-\frac{b}{2a}, -\frac{D}{4a}\right] = \left[-\frac{-16}{2\cdot(-2)}, -\frac{144}{4\cdot(-2)}\right] = [-4,18]$$

Graf:



$a < 0 \Rightarrow$ konkávna $\cap$