KVADRATICKÉ NEROVNICE:

Pr. 1 Riešme nerovnicu

$$2x^2+5x-10 < -x^2-8$$

Ako túto rovnicu riešiť? → Mohli by sme napríklad načrtnúť graf oboch fcií (naľavo aj napravo) a pozrieť sa, kde je ľavá fcia menšia ako pravá.
→ Moc komplikované, radšej si členy dáme na jednu stranu.

$$2x^2+5x-10 < -x^2-8 \quad /+x^2, +8$$

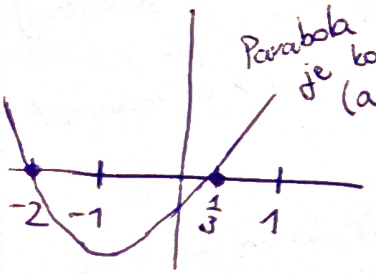
$$3x^2+5x-2 < 0 \quad \text{(lepšie sa porovnáva s nulou)}$$

Túto rovnicu môžeme riešiť viacerými spôsobmi, no pri oboch sa oplatí najprv nájsť korene: $D = b^2-4ac = 5^2-4\cdot3\cdot(-2) = 25+24 = 49$

$$x_{1,2} = \frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a} \begin{cases} \frac{-5+7}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \ (\doteq 0{,}33) \\ \frac{-5-7}{6} = -2 \end{cases}$$

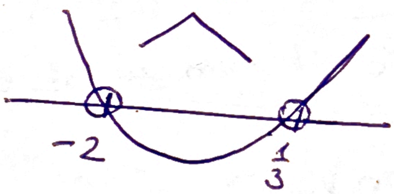
① Spôsob → graficky načrtneme graf fcie $y = 3x^2+5x-2$, pričom presná súradnica vrcholu nehrá úlohu.

Parabola je konvexná $(a>0)$



zjednodušíme ⟹

Prázdne krúžky (ostrá nerovnosť)



⟹ Vidíme, že fcia $y = 3x^2+5x-2$ je menšia ako nula pre $x \in (-2, \frac{1}{3})$
(pozor otvorený interval!)

② Spôsob → tabuľkou (Minule sme to robili metódou nulových bodov) si rozložíme výraz a sledujeme, aké má znamienko

$$3x^2+5x-2<0$$
$$3\left(x^2+\tfrac{5}{3}x-\tfrac{2}{3}\right)<0$$
$$3(x+2)\left(x-\tfrac{1}{3}\right)<0$$

NB: $-2, +\frac{1}{3}$

výraz	$(-\infty;-2)$	$(-2,\frac{1}{3})$	$(\frac{1}{3},\infty)$
$(x+2)$	−	+	+
$(x-\frac{1}{3})$	−	−	+
$3(x+2)(x-\frac{1}{3})$	+	$\boxed{-}$	+

Využívame, že
$+\cdot+=+$
$+\cdot-=-$
$-\cdot+=-$
$-\cdot-=+$

$\Rightarrow x\in(-2, \frac{1}{3})$

Bonus: Skúste si rozmyslieť ako by vyzeral graf fcie $y = |3x^2+5x-2|$ a ako by sa zmenilo riešenie nerovnice $|3x^2+5x-2| < 0$

Na zamyslenie: Ako by sa zmenilo riešenie ak by sme mali nerovnosť $3x^2+5x-2 \leq 0$?

KUBICKÉ FUNKCIE/ROVNICE:

Pr. 2 Riešme rovnicu:

$$x^3 - 9x^2 + 8x + 60 = 0$$

Existuje univerzálny spôsob, ako **Všeobecný predpis** vyriešiť akúkoľvek ~~kva~~ kubickú rovnicu $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, avšak je veľmi komplikovaný (viď. „Cardanove vzorce“) (Obecne ešte aj pre $\sim x^4$) (koeficienty nasvedčujú tomu, že by mohlo existovať)

Skúsime preto „uhádnuť“ jeden celočíselný koreň

Pozn.: Ak ~~koeficienty~~ kubická rovnica neobsahuje abs. člen $\Rightarrow x = 0$ je koreň.

Skúsme $x = -2 \Rightarrow (-2)^3 - 9\cdot(-2)^2 + 8\cdot(-2) + 60 = 0$

$$-8 - 36 - 16 + 60 = 0$$

$$0 = 0 \Rightarrow x = -2 \text{ je koreň}$$

$\Rightarrow$ Výraz môžeme zapísať vždy ako súčin začiatočných a jedna z nich bude $x+2$. $\rightarrow$ **MUSÍME VYDELIŤ POLYNÓM POLYNÓMOM** $\rightarrow (x+2)\,p(x) = 0$

polynóm (2. stupňa)

DELENIE POLYNÓMOV:

$$(x^3 - 9x^2 + 8x + 60) : (x+2) = x^2 - 11x + 30$$

$$\ominus\, \cancel{x^3} \ominus 2x^2$$

$$-\cancel{11x^2} + 8x + 60$$

$$\oplus\, \cancel{11x^2} \oplus 22x$$

$$\cancel{30x} + \cancel{60}$$

$$\ominus\, \cancel{30x} \ominus \cancel{60}$$

$$0 \rightarrow \text{vyšiel nám zvyšok } 0 \Rightarrow \text{dôkaz, že náš koreň skutočne rieši danú rovnicu}$$

Postup:
1) Podelím prvým členom
2) Vynásobím deliteľ výsledkom
3) Otočím znamienka (odčítam)
4) Opakujem dokým je st(čitateľa) > st(menovateľ)

Prepíšeme:

$$(x+2)(x^2 - 11x + 30) = 0$$

$$* = (x+2)(x-5)(x-6) = 0$$

Toto už vieme rozdeliť (Vietove vzorce)

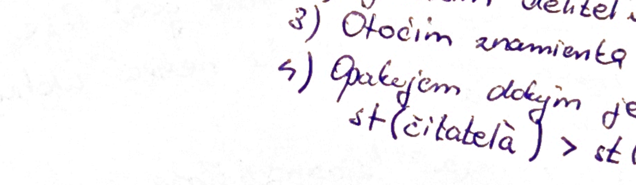
NB: $x = -2, 5, 6$ $\Rightarrow$ Riešenie $x \in \{-2, 5, 6\}$

Čo ak budeme mať nerovnicu? $(x+2)(x-5)(x-6) \leq 0$

tabuľka

	$(-\infty,-2)$	$(-2,5)$	$(5,6)$	$(6,\infty)$
$x+2$	$-$	$+$	$+$	$+$
$x-5$	$-$	$-$	$+$	$+$
$x-6$	$-$	$-$	$-$	$+$
$*$	$\boxed{\ominus}$	$\oplus$	$\boxed{\ominus}$	$\oplus$

veľa výpočtov sa dá spraviť v hlave $\Longrightarrow$



Graf bude vyzerať takto

Bonus: Skúste opäť odhadnúť graf a riešenie $|x^3 - 9x^2 + 8x + 60| > 0$

RACIONÁLNE LOMENÉ FCIE:

Všeobecný predpis: $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$; kde $P(x), Q(x)$... polynómy ale $Q(x) \neq 0$.

→ Narazili sme na prvý typ fcií, kde $D_f \neq \mathbb{R}$.
↳ Menovateľ výrazu nikdy nesmie byť rovný nule!

Pr. 3) Riešme nerovnicu:

$$\frac{x^3 - 9x^2 + 11x + 21}{x^2 - 2x - 35} \geq 0$$

Menovateľ nesmie byť rovný 0 → $x^2 - 2x - 35 \neq 0$

$$(x+5)(x-7) \neq 0$$

$$\Rightarrow x \neq -5$$

$$x \neq 7 \quad \Rightarrow D(\text{menovateľ}) = \mathbb{R} - \{-5, 7\}$$

Čitateľ môže byť ľubovoľný, avšak potrebujeme poznať jeho znamienko
↳ nájdeme korene podobne ako predtým:

$$x^3 - 9x^2 + 11x + 21 = 0$$

Skúsme hľadať riešenie $x = -1 \Rightarrow (-1)^3 - 9\cdot(-1)^2 + 11\cdot(-1) + 21 = 0$

$$-1 - 9 - 11 + 21 = 0 \quad \checkmark \text{ sedí}$$

Delíme: $(x^3 - 9x^2 + 11x + 21) : (x+1) = x^2 - 10x + 21 = (x-3)(x-7)$

ďalej rozkladám

$$\begin{array}{l}
\ominus x^3 \ominus x^2 \\
\hline
-10x^2 + 11x + 21 \\
\oplus 10x^2 \oplus 10x \\
\hline
21x + 21 \\
\ominus 21x \ominus 21 \\
\hline
0
\end{array}$$

Takže máme

$$\frac{(x+1)(x-3)\cancel{(x-7)}}{(x+5)\cancel{(x-7)}} \geq 0$$

$$\frac{(x+1)(x-3)}{x+5} \geq 0$$

Ak by sme mali rovnicu, tak tu vidíme, že riešenie je $x \in \{-1, 3\}$

Opäť metódou nulových bodov (tabuľkou):

$(-\infty, -5)$	$(-5, -1\rangle$	$\langle -1, 3\rangle$	$\langle 3, \infty)$
$\frac{-\cdot-}{-}$	$\frac{-\cdot-}{+}$	$\frac{+\cdot-}{+}$	$\frac{+\cdot+}{+}$
⊖	⊕	⊖	⊕

NB: $-1, 3, -5$

Riešenie je $x \in (-5, -1\rangle \cup \langle 3, \infty) - \{7\}$

Pozn.: Čo sa bude diať s touto fciou ak sa x blíži k −5?
Ako bude približne vyzerať graf?

Lineárne lomené fcie:

Špeciálny prípad racionálnej lomenej fcie, kde oba polynómy sú lineárne fcie (1. rádu)

Všeobecný predpis $\boxed{f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}}$

$a, b, c, d \in \mathbb{R}$

- Musí platiť, že $\boxed{ad \neq cb}$ → dostaneme konštantnú fciu

Lebo: $\dfrac{ax+b}{cx+d}$ / ak platí $ad = bc$ rozšírime c čitateľ aj menovateľ

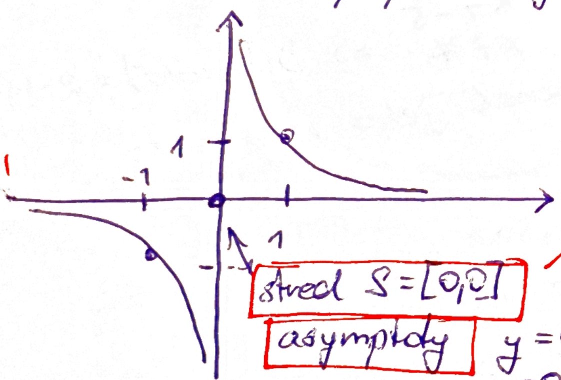
$$\frac{acx+\overset{=ad}{bc}}{c(cx+d)} = \frac{acx+ad}{c(cx+d)} = \frac{a(\cancel{cx+d})}{c(\cancel{cx+d})} = \frac{a}{c} \rightarrow \text{konštantná fcia}$$

- Ďalej musí platiť, že $\boxed{c \neq 0}$ → dostaneme lineárnu fciu
- Takisto menovateľ nesmie byť nulový → $cx + d \neq 0$ ⇒ $\boxed{x \neq -\dfrac{d}{c}}$

Grafom lineárnej lomenej fcie je hyperbola.

Najjednoduchší prípad je graf nepriamej úmernosti: $f(x) = \dfrac{1}{x}$

(špeciálny prípad, kde $a=0$, $b=1$, $c=1$, $d=0$)



$\boxed{\text{stred } S=[0,0]}$ → graf je stredovo symetrický voči bodu [0,0]

$\boxed{\text{asymptoty}}$ $y=0$ → horizontálna / vodorovná; $x=0$ → vertikálna / zvislá

Poloha stredu a asymptôt súvisí s koeficientami a, b, c, d

Ako nájsť polohu stredu a asymptôt?

Musíme využiť prepis do „stredového tvaru"

$$\boxed{y = y_s + \frac{k}{x - x_s}}$$

$[x_s, y_s]$ → Poloha stredu

k .. koeficient určujúci tvar paraboly (kvadranty, vzdialenosť od stredu)

$\boxed{k>0}$ ⇒ I. a III. kvadrant $\boxed{k<0}$ ⇒ II. a IV.

Pr. 4, $y = \dfrac{3x-5}{x-2}$ → prepis urobíme vydelením (čiastočným)

$D_f = \mathbb{R} - \{2\}$

$$(3x-5) : (x-2) = 3 + \frac{1}{x-2}$$
$$\underline{\ominus 3x \oplus 6}$$
$$1 \rightarrow \text{ostal nám zvyšok} \rightarrow \text{podelíme}$$

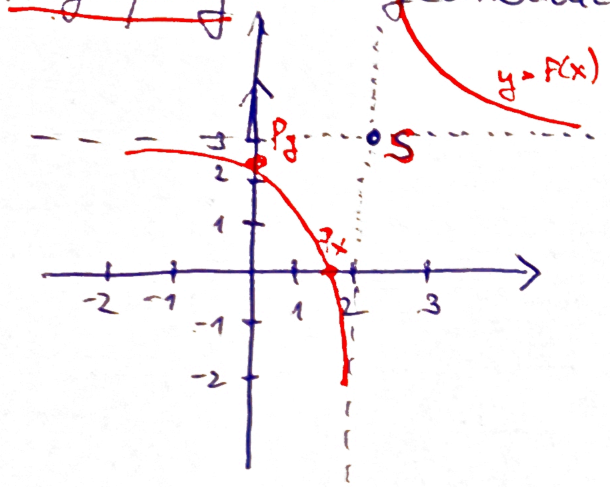
Dostali sme prepis

$$y = 3 + \frac{1}{x-2} \Rightarrow \boxed{S = [3, +2]}$$

Dostali sme teda hyperbolu posunutú o „dva doprava" a „tri hore"

Musíme sa pozrieť čo sa deje pre veľké x (vodorovná) a zvislú už máme

<u>Asymptoty</u> → jednoduchého



$$\left.\begin{matrix} y = y_s \\ x = x_s \end{matrix}\right\} \quad \begin{matrix} y = 3 \text{ (vodorovná)} \\ x = 2 \text{ (zvislá)} \end{matrix}$$

Napokon $k > 0 \Rightarrow$ I. a III. kvadrant

Ešte nám chýbajú <u>priesečníky s osami</u>: (známa vec už :))

P_y: $x = 0 \Rightarrow$ do pôv. tvaru (použime 1.) $y = \dfrac{3 \cdot 0 - 5}{0 - 2} = \dfrac{5}{2}$

$$\boxed{P_y = \left[0, \tfrac{5}{2}\right]}$$

P_x: $y = 0 \Rightarrow 0 = \dfrac{3x - 5}{x - 2} \quad / \cdot (x-2)$

$0 = 3x - 5 \quad /+5$

$5 = 3x$

$x = \dfrac{5}{3} \Rightarrow \boxed{P_x = \left[\tfrac{5}{3}, 0\right]}$

<u>Zhrnutie postupu ešte raz:</u>

1) Určíme definičný obor tak, že riešime rovnicu „menovateľ $\neq 0$".
2) Prepíšeme ~~rovn~~ fciu do „stredového tvaru" $y = y_s + \dfrac{k}{x - x_0}$
3) Nájdeme súradnice stredu ← z tvaru (+ na cvičení si ukážeme odvodenie)
4) Nájdeme asymptoty grafu: horizontálna $y = y_s$, vertikálna $x = x_s$
5) Nájdeme priesečníky s osami.
6) Podľa znamienka koeficientu k napokon zostrojíme graf.

Pr. 5 Nakreslite graf fcie, vyznačte stred a priesečníky s osami:

$$y = \frac{5x-2}{1-x} \qquad D_f = R - \{1\}$$

Je vhodné si pred úpravou prepísať na nami použitý tvar:

$$y = \frac{5x-2}{-x+1} \Rightarrow (5x-2):(-x+1) = -5 - \frac{3}{1-x} \Rightarrow \boxed{S = [1,-5]}$$

$$\ominus 5x \oplus 5$$

$$= -5 + \frac{3}{x-1}$$

Asymptoty: vertikálna $\boxed{x=1}$, horizontálna $\boxed{y=-5}$

Priesečníky:

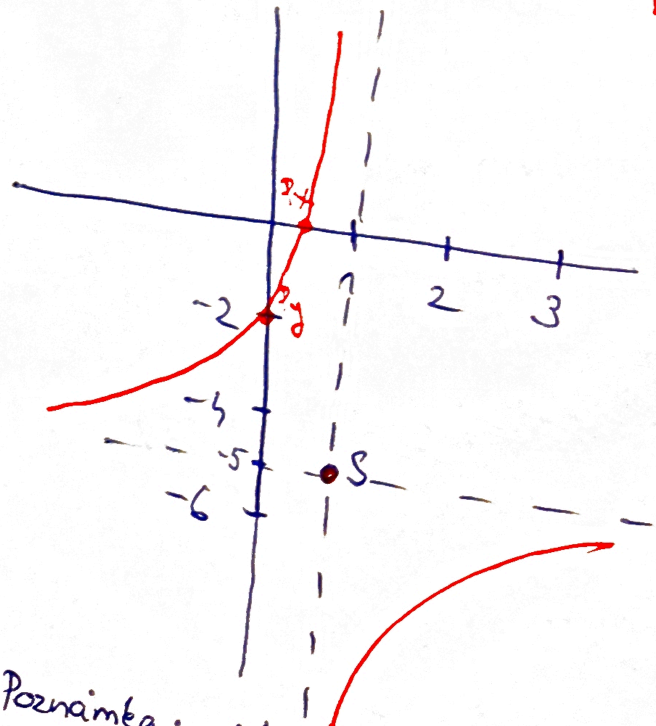
P_y: $x=0 \Rightarrow y = \frac{5\cdot 0-2}{1-0} = -2 \Rightarrow \boxed{P_y = [0,-2]}$

P_x: $y=0 \Rightarrow 0 = \frac{5x-2}{1-x}$

$0 = 5x - 2 \quad /+2$

$2 = 5x \quad /:5$

$x = \frac{2}{5} \Rightarrow \boxed{P_x = [\frac{2}{5}, 0]}$



$$y = \frac{ax+b}{cx+d}$$

$$(ax+b):(cx+d) = \frac{a}{c} + \frac{\frac{bc-ad}{c}}{c\left(x+\frac{d}{c}\right)}$$

$$\ominus ax \ominus \frac{a}{c}d$$

$$\overline{\quad b - \frac{ad}{c} \quad}$$

y_s $\quad x_s$

Vo všeobecnosti asymptoty:

$$\boxed{\begin{aligned} x_s &= -\frac{d}{c} \\ y_s &= \frac{a}{c} \end{aligned}} \qquad \begin{aligned} D_f &= R - \{-\tfrac{d}{c}\} \\ H_f &= R - \{\tfrac{a}{c}\} \end{aligned}$$

+ Poznámka: Ukážka všeobecného výpočtu polohy stredu.

Pr. 6* Ekonomická aplikácia dosiaľ prebratých (lineárnych) fcií.

(Podobné príklady → DÚ 2 → Pr. 13, 14)

V posledných mesiacoch je vysoká inflácia zodpovedná za prudké zvyšovanie cien potravín a pohonných hmôt. Poľská vláda ako reakciu zastropovala cenu benzínu a znížila DPH na potraviny. V dôsledku toho sa množstvo Slovákov (a Čechov) rozhodlo vycestovať za nákupmi do Poľska, aby ušetrili.

Rodina z pohraničnej oblasti potrebuje spraviť nákup, za ktorý doma zaplatí 42 €. Ak však vycestuje do Poľska zaplatí za rovnaký nákup v prepočte o 25% menej. Avšak musí prejazdiť isté množstvo benzínu, ktorý momentálne stojí 1,05 €/liter. Ak majú auto so spotrebou 8 l / 100 km, ako najďalej za hranice môžu vycestovať, aby sa im to ekonomicky oplatilo?

Uvažujeme, že na Slovensku nie je potrebné použiť auto.

Cena na Slovensku: y... cena $y = 42$

Cena v Poľsku: y... cena, x... počet litrov

$y = 75\% \cdot 42 + 1{,}05 \cdot x$

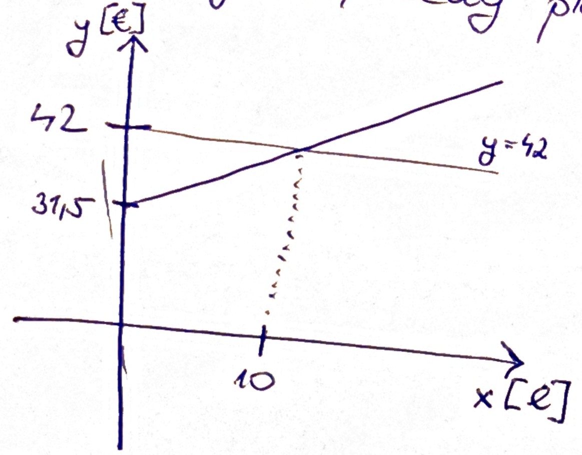
$y = 31{,}5 + 1{,}05 \cdot x$

Nás zaujíma, kedy platí:

$31{,}5 + 1{,}05x < 42 \quad /-31{,}5$

$1{,}05x < 10{,}5$

$x < 10$



Takže do vzdialenosti, kým miní menej ako 10 l sa nákup oplatí.

Koľko je to km?

8 l .... 100 km
10 l .... ? km

$\frac{10}{8} = \frac{?}{100}$

$? = \frac{10}{8} \cdot 100 = 125$ km

to polovica cesty tam a späť

Cena za 1 km... $\frac{8 \cdot 1{,}05}{100} = 0{,}084$ €

počet litrov; cena za liter; počet km, čo prejdem

Ak môžem minúť najviac 10 l, tak môžem ísť až asi 60 km od hranice.

Pozn.: Rovnako fungujú napr. ceny elektriky obsahujúce fixnú zložku a ceny za jednotku odoberaného prúdu.

Zhrnutie z prednášky (mocniny, odmocniny, exponenciála, logaritmus):

$$a^n \qquad \begin{array}{ll} a \dots \text{základ} & a \in \mathbb{R} \\ n \dots \text{exponent} & n \in \mathbb{N} \end{array}$$

Vzťahy:

$$\boxed{\begin{aligned} a^{b+c} &= a^b \cdot a^c \\ a^{b \cdot c} &= (a^b)^c = (a^c)^b \\ a^0 &= 1 \\ a^{\frac{b}{c}} &= \sqrt[c]{a^b} \\ a^{-n} &= \frac{1}{a^n} \end{aligned}}$$

Pr.: $2^8 = 2^5 \cdot 2^3 = 2^2 \cdot 2^6 = \dots$

Pr.: $2^8 = (2^4)^2 = (2^2)^4$

druhá sa nepíše

Pr.: $16^{\frac{3}{2}} = \sqrt{16^3} = 64$

Definičný obor fcie obsahujúcu odmocninu párnu! je vždy určený podmienkou, že výraz pod odmocninou ≥ 0.